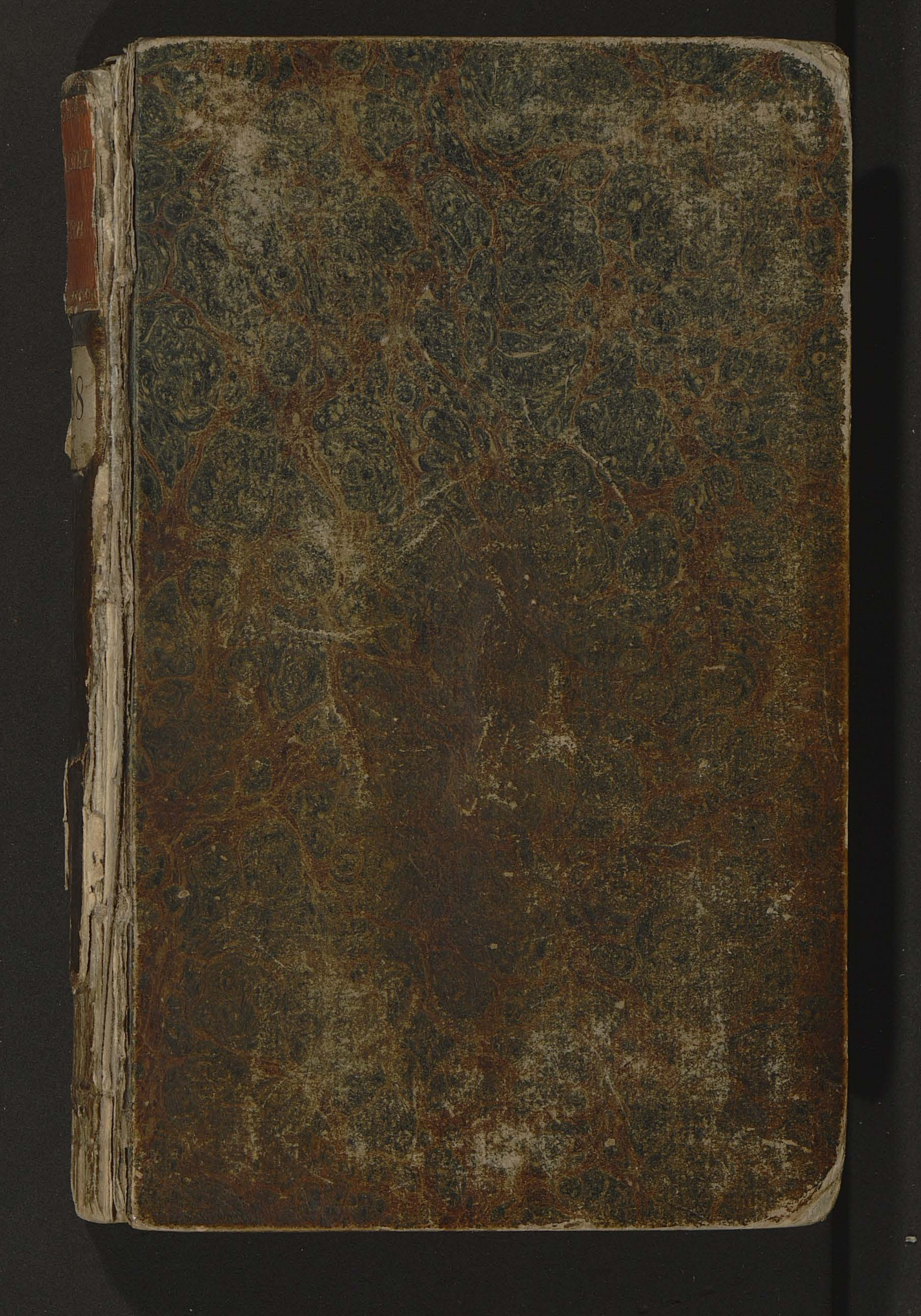


Pope sagt von Newton
Das ist die Inschrift auf seinem Monumente
All nature and her laws lay hid in night
God said: let Newton be! and all was light.

Marten Wilken hat sein Werk „Flores algebraices" mit folgenden zwei Versen datirt
Vt soL In CoeLIs sIC eMICat aLgebra terrIs,
ALgebra sIC artes phoebVs Vt astra praeIt.

Sinus
Cosinus
tangens
Cotangens
Secans
Cosecans

1° ~~[illegible]~~ Iloczyn funkcyi w kątach wierzchołkowych zawsze jest $= 1$ np $\tan\alpha \times \operatorname{ctg}\alpha = 1$

2° ~~[illegible]~~ Iloczyn dwóch funkcyj nad lub pod tą samą linią leżących = funkcyi pomiędzy pierwszemi leżącej np $\sin\alpha \times \operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha \times \operatorname{cosec}\alpha = \sec\alpha$

3° Iloraz dwóch przy sobie leżących funkcyj = funkcyi przyległej z drugiej strony podzielnej np
$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \cos\alpha$, $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha} = \sin\alpha$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Cale i Linie Paryzkie

Centymetry

Trigonometrische Formeln

$\frac{y}{r} = \sin\alpha$ --- $y = r\sin\alpha$

$\frac{x}{r} = \cos\alpha$ --- $x = r\cos\alpha$

$\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$ (: π ist die halbe Peripherie :)

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$

$\frac{y}{x} = \tan\alpha$ --- $y = x\tan\alpha$

$\frac{r}{x} = \sec\alpha$ --- $r = x\sec\alpha$

$\frac{x}{y} = \cot\alpha$ -- $x = y\cot\alpha$

$\tan\alpha\cot\alpha = 1$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha.$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\text{tg}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\text{Chorda}\,2\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$

$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

$\text{Ctg}(-\alpha) = -\text{Ctg}\,\alpha$

$\sec(-\alpha) = +\sec\alpha$

$\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec}\,\alpha$

$\sin\frac{1}{2}\pi = 1$

$\sin\frac{3}{2}\pi = -1$

$\cos\frac{1}{2}\pi = 0$

$\cos\pi = -1$

$\cos\frac{3}{2}\pi = \pm 0$

$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \text{tg}(45^\circ - \alpha)$

$\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha} = \text{Ctg}(45^\circ - \alpha)$

$\sin\frac{1}{2}\alpha + \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1+\sin\alpha}$

$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha}$

$\frac{1 \pm \sin 2\alpha}{1 \mp \sin 2\alpha} = \text{tg}^2(45^\circ \pm \alpha)$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{\sqrt{sec^2\alpha-1}}{sec^2\alpha} = \frac{1}{cosec\,\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{ctg\,\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}} = \frac{1}{sec\,\alpha} = \frac{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}{cosec\,\alpha}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{ctg\,\alpha} = \sqrt{sec^2\alpha-1} = \frac{1}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{sec^2\alpha-1}} = \sqrt{cosec^2\alpha-1}$$

$$sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}{ctg\,\alpha} = \frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha} = \sqrt{1+ctg^2\alpha} = \frac{sec\,\alpha}{\sqrt{sec^2\alpha-1}}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} \qquad tg\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{tg\,\alpha}{1+\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$tg\,\alpha + ctg\,\alpha = 2\,cosec\,2\alpha$$

$$ctg\,\alpha - tg\,\alpha = 2\,cotg\,2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$tg\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg\tfrac{1}{4}\pi = tg\,45^\circ = 1$$

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

$$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \cos\alpha$$

$$\sin.vers.\alpha = 1-\cos\alpha$$

$$\cos.vers.\alpha = 1-\sin\alpha$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$ctg\,\alpha + ctg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$ctg\,\alpha - ctg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$tg^2\alpha - tg^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{tg\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tg\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = tg\tfrac{1}{2}(\alpha\pm\beta)$$

$$\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta} = -ctg\tfrac{1}{2}(\alpha\mp\beta)$$

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta} = -\frac{ctg\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)}{tg\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{sec\,\alpha+sec\,\beta}{sec\,\alpha-sec\,\beta}$$

Sin α ist gleich:

1. $\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha$
2. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}$
3. $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
5. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
6. $2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha$
7. $\sqrt{1-\cos 2\alpha}$
8. $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$
9. $\dfrac{2}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}$
10. $\dfrac{\sin(30^\circ+\alpha)-\sin(30^\circ-\alpha)}{\sqrt{3}}$
11. $2\sin^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)-1$
12. $1-2\sin^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)$
13. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}$
14. $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}$
15. $\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)$
16. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
17. $\dfrac{\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)}{\sqrt{3}}$
18. $2\left(\sin(60^\circ+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)$
19. $2\left(\frac{\sqrt{3}.\cos\alpha}{2}-\sin(60^\circ-\alpha)\right)$
20. $\dfrac{e^{\alpha\sqrt{-1}}-e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

Cos α ist gleich:

1. $\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$
2. $\sin\alpha\operatorname{cotg}\alpha$
3. $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$
5. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
6. $\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$
7. $1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$
8. $2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-1$
9. $\sqrt{1+\cos 2\alpha}$
10. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}$
11. $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha}$
12. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}$
13. $\dfrac{2}{\operatorname{tg}(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)}$
14. $2\cos(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)\cos(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha)$
15. $\cos(60^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)$
16. $\dfrac{1}{\sec\alpha}$
17. $\dfrac{\sin(60+\alpha)+\sin(60^\circ-\alpha)}{\sqrt{3}}$
18. $2\left(\cos(60^\circ+\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$
19. $2\left(\cos(60-\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$
20. $\dfrac{e^{\alpha\sqrt{-1}}+e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}$

tang α gleicht:

1. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{Ctg}\,\alpha - 2\,\mathrm{Ctg}\,2\alpha$

2. $\frac{1}{\mathrm{Cotg}\,\alpha}$

3. $\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$

4. $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$

5. $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

6. $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\alpha}$

7. $\frac{2\,\mathrm{Ctg}\,\frac{1}{2}\alpha}{\mathrm{Ctg}^2\,\frac{1}{2}\alpha - 1}$

8. $\frac{2}{\mathrm{Ctg}\,\frac{1}{2}\alpha - \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{2-\mathrm{Sec}^2\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,\mathrm{Ctg}.\,\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{Cosec}.^2\,\frac{\alpha}{2} - 2}$

9. $\mathrm{Ctg}\,\alpha - 2\,\mathrm{Ctg}\,2\alpha$

10. $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

11. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

12. $\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}$

13. $\frac{\mathrm{tg}(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha) - \mathrm{tg}(45^\circ-\frac{1}{2}\alpha)}{2}$

14. $\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\alpha^2}{3-\cfrac{\alpha^2}{5-\cfrac{\alpha^2}{7-\cfrac{\alpha^2}{9-\alpha^2 \text{ etc.}}}}}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{e^{2\alpha\sqrt{-1}}-1}{\left(e^{2\alpha\sqrt{-1}}+1\right)\sqrt{-1}}$$

Wenn $x = \sin\beta$, so ist, wenn r eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet,

$$\text{Arc}\sin x = 2r\pi + \beta$$
$$\text{Arc}\sin x = (2r+1)\pi - \beta$$
$$\text{Arc}\cos x = 2r\pi + \beta$$
$$\text{Arc}\cos x = 2r\pi - \beta$$
$$\text{Arc}\sin(-x) = 2r\pi - \beta = (2r+1)\pi + \beta$$
$$\text{Arc}\cos(-x) = (2r+1)\pi + \beta = (2r+1)\pi - \beta$$
$$\text{Arc}\sin x = \text{Arc}\cos\sqrt{1-x^2} = \text{Arc}\,\text{tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc}\sec\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\text{Arc}\cos x = \text{Arc}\sin\sqrt{1-x^2}$$

da $\sqrt{1-x^2}$ den Cosinus eines Bogens vorstellt, dessen Sinus $= x$, und den Sinus eines Bogens, dessen Cosinus $= x$

$$\text{Arc}\,\text{tg}\,x = \text{Arc}\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Arc}\,\text{ctg}\frac{1}{x} = \text{etc}$$

$$\sin(n+1)\beta = 2\cos\beta\sin n\beta - \sin(n-1)\beta$$
$$\cos(n+1)\beta = 2\cos\beta\cos n\beta - \cos(n-1)\beta$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) = \tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\text{ctg}\,\alpha \pm \text{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta - \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{1-\sin\beta}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta + \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{1+\sin\beta}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\sqrt{1+\sin\beta}+\sqrt{1-\sin\beta}}{2}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\sqrt{1+\sin\beta}-\sqrt{1-\sin\beta}}{2}$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$$

$$tg^2\alpha - tg^2\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

~~$(1+\sin\alpha)^{\frac{1}{2}} = \cos\tfrac{1}{2}\alpha + \sin\tfrac{1}{2}\alpha$~~

$$\sin\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}$$

$$e^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}.\sin\alpha$$

$$e^{-\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha - \sqrt{-1}.\sin\alpha$$

wo log. nat. $e = 1$ also

$e = 2,7182818$

und log. brig. $e = 0.4342945$

$$\sin(m+1)\beta = \sin m\beta\cos\beta + \cos m\beta\sin\beta$$

$$\cos(m+1)\beta = \cos m\beta\cos\beta - \sin m\beta\sin\beta$$

und wenn man in diesen Formeln $m = 1.2.3.4.\ldots$ seyn läßt, so ergeben sich die Sinusse und Cosinusse ~~der~~ aller Vielfachen. —

$$\sin(m+2)\beta = 2\sin m\beta \cos 2\beta - \sin(m-2)\beta$$

$$\cos(m+2)\beta = 2\cos m\beta \cos 2\beta - \cos(m-2)\beta$$

weil aber

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta \text{ und}$$
$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta \text{ also}$$
$$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta \text{, so ist}$$

$$\sin(30^\circ+\alpha) = \sin(30^\circ-\alpha) + \sin\alpha\sqrt{3}$$

$$\sin(m+2)\beta = 2(1-2\sin^2\beta)\sin m\beta - \sin(m-2)\beta$$

$$\cos(m+2)\beta = 2(1-2\sin^2\beta)\cos m\beta - \cos(m-2)\beta$$

Setzt man hier $m = 2, 4, 6, 8,$ etc
mit Rücksicht auf die Gleichung.

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

so erhält man Sinusse und Cosinusse aller viel- (von geraden Zahlen) fachen Bogen, setzt man aber $m = 1, 3, 5, 7,$ etc so wird man erhalten die von ungeraden Zahlen.

$$\sin(R\pm\alpha) = +\cos\alpha \qquad \cos(R\pm\alpha) = \mp\sin\alpha$$
$$\sin(2R\pm\alpha) = \mp\sin\alpha \qquad \cos(2R\pm\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(3R\pm\alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(3R\pm\alpha) = \pm\sin\alpha$$
$$\sin(4R\pm\alpha) = \pm\sin\alpha \qquad \cos(4R\pm\alpha) = +\cos\alpha$$

wenn R ~~und~~ den rechten Winkel bedeutet.

$\sin(3^s+\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(3^s+\alpha)=-\sin\alpha$
$\sin(3^s-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(3^s-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(6^s+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(6^s+\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin(6^s-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(6^s-\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin(9^s+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(9^s+\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(9^s-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos(9^s-\alpha)=-\sin\alpha$
$\sin(12^s+\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(12^s+\alpha)=\cos\alpha$
$\sin(12^s-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(12-\alpha)=\cos\alpha$

$tg(3^s+\alpha)=-ctg\alpha$	$ctg(3^s+\alpha)=-tg\alpha$
$tg(3^s-\alpha)=ctg\alpha$	$ctg(3^s-\alpha)=tg\alpha$
$tg(6^s+\alpha)=tg\alpha$	$ctg(6^s+\alpha)=ctg\alpha$
$tg(6^s-\alpha)=-tg\alpha$	$ctg(6^s-\alpha)=-ctg\alpha$
$tg(9^s+\alpha)=-ctg\alpha$	$ctg(9^s+\alpha)=-tg\alpha$
$tg(9^s-\alpha)=ctg\alpha$	$ctg(9^s-\alpha)=tg\alpha$
$tg(12^s+\alpha)=tg\alpha$	$ctg(12^s+\alpha)=ctg\alpha$
$tg(12^s-\alpha)=-tg\alpha$	$ctg(12^s-\alpha=-ctg\alpha$

Der Halbmesser ist gleich in der Länge dem Bogen von $57^\circ\ 17'\ 44.''\ 8''' = 206264.''\ 8'''$ und Logarithmus davon ist $= 5.\ 3144252$

In einem geradlinigten Dreiecke dessen Winkel α, β, γ. heißen finden folgende Gleichungen Statt:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$$

Ist a der Halbmesser der Kugel, so ist ihre Oberfläche $= 4a^2\pi$ und ihr körperlicher Inhalt $= \frac{4a^3\pi}{3}$ —

Da der umschriebene Cylinder zur Höhe den Durchmesser der Kugel hat, so ist dessen krumme Oberfläche $= 4a^2\pi$, und dessen ganze Oberfläche $= 6a^2\pi$ und dessen körperlicher Inhalt $= 2a^3\pi$. —

Der umschriebene gleichseitige Kegel hat die Höhe $3a$, also ist jede seiner Seitenlinien gleich $a\sqrt{12}$ und daher die krumme Oberfläche des Kegels $= 6a^2\pi$, die ganze Oberfläche desselben $= 9a^2\pi$ und der körperlichen Inhalt $= 3a^3\pi$. —

Sind a, b, c, die Seiten und α, β, γ die gegenüber liegenden Winkel eines geradlinigten Dreiecks, so ist wie bekannt seine Fläche F

$$F = \tfrac{1}{2} bc \operatorname{Sin} \alpha.$$

Sind zwei Winkel α, β und die anliegende Seite c gegeben, so ist

~~$F = \tfrac{1}{2} b^2 \frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}{\operatorname{Sin}\beta}$~~ $= \tfrac{1}{2} c^2 \frac{\operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)}$

Sind die drei Seiten gegeben, so ist

$$\operatorname{Cos}\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \text{ also auch}$$

$$1+\operatorname{Cos}\gamma = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} \text{ und}$$

$$1-\operatorname{Cos}\gamma = \frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2ab}$$

Das Produkt der beiden letzten Gleichungen gibt $1-\operatorname{Cos}^2\gamma$ oder $\operatorname{Sin}^2\gamma$, und da $F = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{Sin}\gamma$ ist, so hat man

$$F = \tfrac{1}{4} \sqrt{\{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\}}$$

Für das gleichschenkliche Dreieck ist $b=c$, also auch $F = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2-a^2}$

Für das gleichseitige Dreieck ist $a=b=c$ also auch $F = \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$. —

Es ist auch ($p = a+b+c$)

$$F = \frac{\tfrac{1}{2} p^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}\gamma}{(\operatorname{Sin}\alpha + \operatorname{Sin}\beta + \operatorname{Sin}\gamma)^2} = \tfrac{1}{4} p^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma$$

Auflösung der Dreiecke

1. Ebene Dreiecke und Polygonen

a, b, c sind die Seiten

α, β, γ — die Winkel

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-b)(\frac{1}{2}s-c)}{bc}} \qquad s = a+b+c$$

Wenn S die Oberfläche eines Dreieckes bedeutet, so ist

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \;\ldots\; p = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

$$S = \frac{bc}{2}\sin\alpha$$

Die ~~Oberfläche~~ Höhe eines Trapezes T ist

$$T = \frac{1}{2g}\sqrt{(a+c+g)(a+g-c)(c+g-a)(a+c-g)} \;\ldots\; g = d-b$$

und a, b, c, d, sind seine vier Seiten, oder

$$T = \frac{2}{g}\sqrt{p'(p'-a)(p'-c)(p'-g)}$$ p' ist die halbe Peripherie des Dreieckes acg

daher die Oberfläche dieses Trapezes

$$\Sigma = \frac{b+d}{d-b}\sqrt{p'(p'-a)(p'-c)(p'-g)}$$

Die Oberfläche eines gleichseitigen Polygon, wenn eine Seite K bekannt ist und die Anzahl n der Seiten, ist

$$\Sigma = \tfrac{1}{4}nK^2 \operatorname{ctg}\frac{2Q}{n}$$ Q bedeutet den Quadranten

aber die Senkrechte aus Centrum dieses Polygons p auf ~~der~~ dessen Seite, oder Apothema ist $= \frac{K}{2}\operatorname{ctg}\frac{2Q}{n} = \alpha$

also $\Sigma = nK\alpha$ d. h. = dem Produkt aus dessen Perimeter und Apothema.

2. Sphärische Dreiecke

a, b, c bedeuten immer die Seiten
α, β, γ – – – – die Winkel

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \cos a - \cos \beta \cos \gamma$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
$\cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma \cos a - \cos \beta \cos \gamma$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

$\cos \alpha \sin \gamma = \cos \beta \sin a \cos c = \cos a \sin c$
$\operatorname{ctg} a \sin c = \operatorname{ctg} \alpha \sin \beta + \cos c \cos \beta$
$\cos \alpha \sin \beta = \cos a \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos c$

Zu jedem (sphärischen) Dreieck läßt es sich ein anderes, das sogenannte Polardreieck, finden dessen Seiten mit den Winkel des ersteren, und dessen Winkel mit den Seiten des ersteren stückweise zusammengenommen π oder 180° geben, dieses Dreieck kann aus jeder der fundamental Gleichungen abgeleitet werden, wenn man darin anstatt $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$; $\pi - a, \pi - b, \pi - c, \pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ setzt

Dieses Polardreieck kann zum schnellen Umstaltung der in der sphärischen Trigonometrie vorkommenden Formeln gebraucht werden. –

Rechtwinklige sphärische Dreiecke

$$\cos h = \cos a \cos b = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin h}$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} h}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \cos\alpha \sin b$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{ctg} a \sin b$$

$$\sin a = \sin h \sin\alpha$$

$$\operatorname{cotg} h = \operatorname{ctg} b \cos\alpha$$

~~cos h~~

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} h = -\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin(h-b)}{\sin(h+b)}$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h+b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(h-b)$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) = \sqrt{\operatorname{tg}(45^\circ - x)}$$

$$\operatorname{tg} x = \sin h \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45^\circ\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45^\circ\right)$$

Schiefwinklige sphärische Dreiecke

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\beta \sin\gamma}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos a &= \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}\end{aligned}\right\} \text{-- (I)}$$

Gaußschen Formeln

(Triangle: sides a, b, c; angles α, β, γ)

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\frac{a+b}{2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\frac{a+b}{2}\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{1}{2}c = \cos\frac{a-b}{2}\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\tfrac{1}{2}c = \sin\frac{a-b}{2}\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$

Neperische Analogien

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,ctg\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\,ctg\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}c$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}c$$

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}\alpha}{tg\,\frac{1}{2}\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}\beta}{tg\,\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\,ctg\,\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,ctg\,\tfrac{1}{2}\gamma$$

Diese Formel ist von Burg gefunden worden.

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right\}} \pm \sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right\}}$$

Denn sey $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, so ist auch $a+\sqrt{b} = \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ also $a=\alpha+\beta$ und $\sqrt{b}=2\sqrt{\alpha\beta}$, daher $b=4\alpha\beta$ und $\beta=\frac{b}{4\alpha}$, darum $a=\alpha+\frac{b}{4\alpha}$ oder $\alpha^2-a\alpha=-\frac{b}{4}$ also $\alpha=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{a^2-b}{4}}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-b}}{2}$

$\beta=a-\alpha$ und daraus folgt der vorige Ausdruck

Die Fläche eines (Dreieckes geradlinigten) ist

$S = \frac{abc}{4r}$ wo abc die drei Seiten und r der Halbmesser des um das Dreieck umgeschriebenen Kreises ist.

Der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $= \frac{2\Delta}{a+b+c}$

Die zwey Gleichungen (I) werden einfacher wenn man in der ersten

$$tg\frac{1}{2}x = tg\frac{1}{2}(b+a)\, tg\frac{1}{2}(b-a)\cot g\frac{1}{2}c$$

und in der zweiten

$$tg\frac{1}{2}x = tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\, tg\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cot g\frac{1}{2}\gamma$$ setzt,

denn auf die Art wird man bekommen

$$\cos\alpha = \cot g\, b\, tg\frac{1}{2}(c+x)$$
$$\cos\beta = \cot g\, a\, tg\frac{1}{2}(c-x)$$

und

$$\cos a = \cot g\,\beta\, \cot g\frac{1}{2}(\gamma-x)$$
$$\cos b = \cot g\,\alpha\, \cot g\frac{1}{2}(\gamma+x)$$

Der körperliche Inhalt eines schiefen Parallelipipedums dessen drei in einem und demselben Punkte zulaufende Kanten a, b, d und die Winkel (a,b), (a,d), (b,d) oder α, β, γ sind,

ist $S = 2abd\sqrt{\left(\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}$

Das Quadrat der Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks ist das Vierfache der Fläche dieses Dreiecks, wenn nemlich α die Hypotenuse, β und γ die zwei Schenkel bedeuten, so ist $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ aber $\beta = \gamma$ und die Fläche $= \frac{\beta\times\gamma}{2} = \frac{\beta^2}{2}$, also $4F = \alpha^2$.

~~Den Schwerpunkt eines Trapezes zu finden~~

Aus drei Seiten eines sphärischen Dreieckes die Fläche F derselben finden

$$\cot\frac{F}{2} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}+\cos C}{\sin C}$$

Es ist aber $\cos C = \dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$ und

$\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos\beta}{\sin\beta}$ also auch

$$\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}+\cos C = \frac{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Weiter ist $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ also auch

$\sin C = 2\sqrt{M}$, wo

$$M = \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$$

und daher endlich

$\cot\frac{F}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2\sqrt{M}}$ eben so findet man

$\sin\frac{F}{2} = \dfrac{\sqrt{M}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$ und

$\cos\frac{F}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$ und endlich

$$\tan\tfrac{1}{4}F = \sqrt{\left\{\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\tan\frac{\beta+\gamma-\alpha}{4}\tan\frac{\alpha+\gamma-\beta}{4}\tan\frac{\alpha+\beta-\gamma}{4}\right\}}$$

In jedem geradlinigen Dreiecke ist zwischen den drei Seiten ~~aaa~~ a, b, c, und drei Winkel α, β, γ, folgendes Verhältniss

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{a}{b}\sin\gamma}{1-\frac{a}{b}\cos\gamma}$$

denn $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ aber $\beta = 180-(\alpha+\gamma)$

deswegen auch $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma}$

oder $\frac{a}{b} = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha\cos\gamma+\sin\gamma}$

~~$(1-\frac{a}{b}\cos\gamma)\,tg\,\alpha = \frac{a}{b}\sin\gamma$~~ $(1-\frac{a}{b}\cos\gamma)\,tg\,\alpha = \frac{a}{b}\sin\gamma$

und daraus die obige Gleichung.
Sucht man aus dieser Gleichung α, so ist

$$\alpha = \frac{a}{b}\frac{\sin\gamma}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{\sin 2\gamma}{\sin 1''} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3\frac{\sin 3\gamma}{\sin 1''} + \ldots\ldots$$

vernachlässigt man die höheren Potenzen, so ist einfach

$$\alpha = \frac{a}{b}\frac{\sin\gamma}{\sin 1''}$$

Die gesuchte Reihe wird auf folgende Art gefunden
Es ist wie oben $a\sin\beta = b\sin\alpha$ ~~= b~~ oder

$$b\sin\alpha = a\sin(\alpha+\gamma) = a(\sin\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)$$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}$ Setzt man anstatt sin α, cos α, sin γ und cos γ die imaginären Ausdrücke, so wird

$$\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}}-e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{e^{\alpha\sqrt{-1}}+e^{-\alpha\sqrt{-1}}} = \frac{a(e^{\gamma\sqrt{-1}}-e^{-\gamma\sqrt{-1}})}{2b-a(e^{\gamma\sqrt{-1}}+e^{-\gamma\sqrt{-1}})}$$

oder

$$\frac{e^{2\alpha\sqrt{-1}}-1}{e^{2\alpha\sqrt{-1}}+1} = \frac{a(e^{\gamma\sqrt{-1}}-e^{-\gamma\sqrt{-1}})}{2b-a(e^{\gamma\sqrt{-1}}+e^{-\gamma\sqrt{-1}})}$$ und daraus

$$e^{2\alpha\sqrt{-1}} = \frac{b-ae^{-\gamma\sqrt{-1}}}{b-ae^{\gamma\sqrt{-1}}}$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen so findet man

$$2\alpha\sqrt{-1} = \log.\frac{b-ae^{-\gamma\sqrt{-1}}}{b-ae^{\gamma\sqrt{-1}}}$$

Entwickelt man den log. im zweiten Glied nach der Formel $\log(a-x) = \log a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \ldots\ldots$ so bekomt man

$$2\alpha\sqrt{-1} = \frac{a}{b}e^{\gamma\sqrt{-1}} + \frac{a^2}{2b^2}e^{2\gamma\sqrt{-1}} + \frac{a^3}{3b^3}e^{3\gamma\sqrt{-1}} + \ldots\ldots$$
$$- \frac{a}{b}e^{-\gamma\sqrt{-1}} - \frac{a^2}{2b^2}e^{-2\gamma\sqrt{-1}} - \frac{a^3}{3b^3}e^{-3\gamma\sqrt{-1}} - \ldots\ldots$$

Dividirt man auf beiden Seiten durch $2\sqrt{-1}$ und bemerkt dass allgemein $e^{m\gamma\sqrt{-1}} - e^{-m\gamma\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\sin m\gamma$ so findet man

$$\alpha = \frac{a}{b}\sin\gamma + \frac{a^2}{2b^2}\sin 2\gamma + \frac{a^3}{3b^3}\sin 3\gamma + \ldots\ldots$$

$(\sqrt{-1})^0 = 1$
$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^2 = -1$
$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^4 = 1$
$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$
u. s. w.

Allgemein wenn r irgend eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet, so ist

$(\sqrt{-1})^{4r} = 1$
$(\sqrt{-1})^{4r+1} = \sqrt{-1}$ oder auch $(\sqrt{-1})^{4r-3} = \sqrt{-1}$
$(\sqrt{-1})^{4r+2} = -1$ . . . $(\sqrt{-1})^{4r-2} = -1$
$(\sqrt{-1})^{4r+3} = -\sqrt{-1}$ . . . $(\sqrt{-1})^{4r-1} = -\sqrt{-1}$

Heisst φ'' ein Bogen in Secunden ausgedrückt so ist $\varphi'' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''}$ und $\sin\varphi = \varphi''\sin 1''$
d. h. will man den Sinus in Bogen-Secunden verwandeln so muss man ihn mit $\sin 1''$ dividiren und umgekehrt.

Regula falsi

Seyen

$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\}$ zwei Hypothesen

und

$\left.\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}\right\}$ Fehler der Resultate

so ist der genauere Werth den wir x nennen wollen

$$x = s_1 - \frac{F_1(s_2 - s_1)}{F_2 - F_1} = s_2 - \frac{F_2(s_1 - s_2)}{F_1 - F_2}$$

Um die Logarithmen der Sinusse und Tangenten kleiner Bogen scharf zu finden dienen folgende Formeln

$$\log.\sin\alpha = \log\alpha + 4.6855749 - \tfrac{1}{3}(10 - \log.\cos\alpha)$$

$$\log.\mathrm{tg}\,\alpha = \log\alpha + 4.6855749 + \tfrac{2}{3}(10 - \log\cos\alpha)$$

Umgekehrt um aus dem gegebenen Logarithmus des Sinus oder der Tangente eines kleinen Winkels den Winkel selbst zu finden hat man folgende Formel

$$\log\alpha = \log.\sin\alpha + 5.3144251 - 10 + \tfrac{1}{3}(10 - \log.\cos\alpha)$$

$$\log\alpha = \log.\mathrm{tg}\,\alpha + 5.3144251 - 11 - \tfrac{2}{3}(10 - \log.\cos\alpha)$$

Diese Formeln setzen voraus, daß der kleine Bogen oder Winkel α in Secunden ausgedrückt sey. Sie geben bei der Anwendung siebenstelliger Logarithmen das Gesuchte genau, so lange α nicht größer als 2° 44' ist; beim Gebrauche fünfstelliger Logarithmen kann α, ohne Gefahr eines Fehlers von einer Einheit der fünften Decimalstelle bis an 8° 38' steigen. Bei Anwendung der dritten und vierten Formel, bestimmt man durch die drei ersten Glieder derselben einen genäherten Werth von α, und mit diesem dann durch Beziehung des vierten Glieds den genauen Werth. —

Um die Seite eines regelmäßigen Polygons zu finden, haben wir folgende allgemeine Gleichungen

$$0 = x^{n-1} - \frac{(n-2)}{1} x^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} x^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} x^{n-7} + \ldots$$

wenn n eine gerade Zahl ist, und

$$0 = x^{n-1} - n x^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1.2} x^{n-5} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} x^{n-7} + \ldots$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, und x bedeutet die gesuchte Seite, n aber die Anzahl der Seiten eines Polygons. So ist z. B. für das regelmäßige Polygon

von 3 Seiten	$x^2 - 3 = 0$
4 —	$x^2 - 2 = 0$
5 —	$x^4 - 5x^2 + 5 = 0$
6 —	$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
7 —	$x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$
8 —	$x^6 - 6x^4 + 10x^2 - 4 = 0$
9 —	$x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^2 + 9 = 0$
10 —	$x^8 - 8x^6 + 21x^4 - 20x^2 + 5 = 0$

Die auf der umgekehrten Seite Logarithmen der Sinus und Tangente kleiner Bogen lassen sich aus Folgendem ableiten:
Es ist $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} + etc$ läßt man die 5 und höheren Potenzen aus weil α sehr klein vorausgesetzt wird so ist $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2.3}\right)$. Da ferner $\sqrt[3]{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)} = 1 - \frac{\alpha^2}{2.3} + \ldots$ so kann man näherungsweise setzen:
$\sin\alpha = \alpha\sqrt[3]{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)} = \alpha\sqrt[3]{\cos\alpha}$, auf die Art wird man erst in der 5 Potenz von α einen Fehler von $\frac{\alpha^5}{45}$ begehen;
Es ist also $\log\sin\alpha = \log\alpha + \frac{1}{3}\log\cos\alpha$
und für den Tafelhalbmesser r, für welchen $\log r = 10$
$\sin\alpha = \frac{\alpha\sqrt[3]{\cos\alpha}}{\sqrt[3]{r}}$ also $\log\sin\alpha = \log\alpha - \frac{1}{3}(10 - \log\cos\alpha)$. Weil aber α in Theilen des Halbmessers ausgedrückt ist und $\log\alpha = \log\alpha'' + \log Arc 1''$ und $\log Arc 1'' = 4.685\ldots$ so hat man den vorigen Ausdruck (x)

Oben haben wir gesehen dass der körperliche Inhalt eines schiefen Parallelipipedums dessen drei in einem und denselben Punkte zulaufende Kanten a, b, c, und und die Seitenwinkel (a,b), (a,d), (d,b) oder α, β, γ sind wenn S diesen körperlichen Inhalt bedeutet, ist

$$S = 2abd\sqrt{\left\{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right\}}$$

Wenn in dem nemlichen Parallelipipedum u, x, y, z die vier Diagonalen bedeuten, so werden die Werthe dieser Diagonalen, wenn man bedenkt dass die drei Seiten bilden die drei Neigungs-Winkel α, 180−β und 180−γ untereinander,

$$u^2 = a^2+b^2+d^2+2ab\cos\gamma+2ad\cos\beta+2bd\cos\alpha$$
$$x^2 = a^2+b^2+d^2-2ab\cos\gamma-2ad\cos\beta+2bd\cos\alpha$$
$$y^2 = a^2+b^2+d^2-2ab\cos\gamma+2ad\cos\beta-2bd\cos\alpha$$
$$z^2 = a^2+b^2+d^2+2ab\cos\gamma-2ad\cos\beta-2bd\cos\alpha$$

also

$$u^2+x^2+y^2+z^2 = 4a^2+4b^2+4d^2$$

d.h. <u>in jedem Parallelipipedum ist die Summe der Quadrate der vier Diagonalen ~~ist~~ der Summe der Quadrate der 12 Kanten gleich</u>. —

Wird eine dreiseitige Pyramide ein $\frac{1}{6}$ von einem Parallelipipedum dessen Basis das Doppelte von der der Pyramide, so wird der körperliche Inhalt ~~P~~ dieser Pyramide

$$P = \frac{1}{3}abd\sqrt{\left\{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right\}}$$

wo a, b, d, die drei in dem nemlichen Punkte zulaufende Kanten sind. —

(x) Für tg α hat man $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{2.3}}{1-\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{\alpha\sqrt[3]{\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)}}{1-\frac{\alpha^2}{2}} = \frac{\alpha}{\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}$ $= \frac{\alpha}{(\cos\alpha)^{\frac{2}{3}}}$ oder für den Halbmesser $r=10$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\alpha r^{\frac{2}{3}}}{(\cos\alpha)^{\frac{2}{3}}}$$ daher $\log\mathrm{tg}\,\alpha = \log\alpha + \frac{2}{3}(10 - \log\cos\alpha)$ u.s.w.

Um den Flächenraum eines sphärischen Dreiecks zu finden, hat man folgende sehr elegante Ausdrücke in denen a, b, c die Seiten und S die Fläche bedeuten

$$\sin\tfrac{1}{2}S = \frac{\sqrt{\left\{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\right\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}S = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

Diese zwei Ausdrücke geben $\frac{1-\cos\frac{1}{2}S}{\sin\frac{1}{2}S} = tg\,\frac{1}{2}S$

und auf der andern Seite der Zähler läßt sich in Factoren zerlegen, und wenn man beachtet daß z. B.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}tg\,\tfrac{1}{2}\alpha}$$

so bekommt man noch einen Ausdruck den man dem Lhuillier verdankt

$$tg\,\tfrac{1}{4}S = \sqrt{\left\{tg\frac{a+b+c}{4}\,tg\frac{a+b-c}{4}\,tg\frac{a+c-b}{4}\,tg\frac{b+c-a}{4}\right\}}$$

° Wenn nur die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks gegeben sind, so ist bekannt daß seine Fläche gleich dem Excesse über 2R. ist, oder wenn die Winkel α, β, γ heißen und S wieder die Fläche; so ist

$$S = (\alpha+\beta+\gamma) - 180°$$

Um den sphärischen Excess zu bestimmen, verfährt man so: es soll die Fläche eines sphärischen Dreieckes S, die der Kugel F und der Excess ε heißen, so ist

$$S = \frac{\varepsilon F}{4.180°}, \quad \text{also} \quad \varepsilon = S.180 \times \frac{4}{F} = \frac{S}{r^2}.\frac{180}{\pi}$$

$F = 4\pi r^2$

in Minuten $\varepsilon' = \frac{S}{r^2}.\frac{180.60}{\pi}$

in Secunden $\varepsilon'' = \frac{S}{r^2}.\frac{180.60.60}{\pi} = \frac{S}{r^2 \sin 1''}$

Für den Halbmesser r ist aber die Oberfläche der Kugel $F = 4r^2\pi$ also

| $r = 3266608'235$ toise. Bessel
| $\log S = 7'713\,7691 + \log \varepsilon$ □ toise

$$\varepsilon = \frac{S}{r^2} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

oder ε in Secunden $= \varepsilon'' = \frac{S}{r^2} \times \frac{180.60.60''}{\pi}$, da aber der in Secunden ausgedrückte Halbmesser $R'' = \frac{180.60.60}{\pi}$ ist, auch

$$\varepsilon'' = R''.\frac{S}{r^2} = \frac{S}{r^2 \sin 1''} \quad \Big| \; \log \varepsilon'' = \log R'' + \log S - 2\log r$$

hier muss r in derselben Einheit ausgedrückt werden, in welcher die Seiten des Dreiecks, für die Bestimmung von S genommen ~~sind~~ worden sind.

Ist r Halbmesser eines Kreises, so ist der Inhalt

des inbeschriebenen Dreiecks $= \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} \quad = 1.299038\ldots r^2$
des umbeschriebenen " $= 3r^2\sqrt{3} \quad = 3.196152\ldots r^2$
des inbeschriebenen Vierecks $= 2r^2$
des umbeschriebenen " $= 4r^2$
des inbeschriebenen Fünfecks $= \frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2.377641\ldots r^2$
des umbeschriebenen " $= 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 3.632713\ldots r^2$
des inbeschriebenen Sechsecks $= \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} \quad = 2.598076\ldots r^2$
des umbeschriebenen " $= 2r^2\sqrt{3} \quad = 3.464102\ldots r^2$
des inbeschriebenen Achtecks $= 2r^2\sqrt{2} \quad = 2.828427\ldots r^2$
des umbeschriebenen " $= 8r^2(\sqrt{2}-1) = 3.313709\ldots r^2$
des inbeschriebenen Zehnecks $= \frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2.938926\ldots r^2$
des umbeschriebenen " $= 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}} = 3.249197\ldots r^2$

Zur annähernden Berechnung des Verhältnisses des Durchmessers zum Umkreise, hat man folgende allgemeine Formeln. Es sey A der Inhalt eines inbeschriebenen und B der Inhalt eines umbeschriebenen Vielecks

von n Seiten; ferner A' der Inhalt des einbe-
schriebenen, und B' der Inhalt des umbeschrie-
benen Vielecks von $2n$ Seiten, so ist $A' = \sqrt{AB}$
und $B' = \frac{2AB}{A+A'}$; setzt man den Halbmesser $= 1$
so läßt sich leicht, von dem Inhalte des
Vierecks ausgehend, das erwähnte Verhältniß
finden

Berechnung der fünf regelmäßigen Körper

Ist r der ~~um den~~ Halbmesser der um den Körper beschriebenen Kugel, so ist
Im Tetraëder der Inhalt von jedem Dreieck
$= \frac{1}{6} r^2 \sqrt{3}$
und die ganze Oberfläche des Tetraëders $= \frac{2}{3} r^2 \sqrt{3}$
Jeden regelmäßigen Körper kann man sich in so viele Pyramiden zerschnitten denken, als er Flächen hat. Diese Pyramiden laufen mit ihren Spitzen im Mittelpunkte des Körpers oder auch im Mittelpunkte der Kugel, in der er enthalten ist zusammen. Die Berechnung dieser Körper hängt also von der Berechnung einer dieser Pyramiden ab.
Im Tetraëder ist die Höhe jeder der vier Pyramiden
$= \sqrt{\frac{1}{4} r^2 - \left(\frac{1}{3} a \sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{6} r$ also der Inhalt einer der vier Pyramiden ist $= \frac{1}{6} r^2 \sqrt{3} \times \frac{1}{18} r = \frac{1}{36} r^3 \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{108} r^3 \sqrt{3}$
und ~~also~~ $\frac{1}{9} r^3 \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27} r^3 \sqrt{3} = 0.06415001 \ldots r^3$ der Inhalt des Tetraëders.

Die Seite eines Tetraëders $= \frac{1}{3} r^2 \sqrt{6}$

Im Octaëder. Die Seite des Octaëders $= \frac{1}{2} r\sqrt{2}$.
Legt man eine Ebene durch vier Puncte des Octaëders, so schneidet diese dasselbe in 2 vierseitige Pyramiden deren Grundfläche $= \frac{1}{2} r\sqrt{2} \times \frac{1}{2} r\sqrt{2} = \frac{1}{2} r^2$ und deren Höhe $= \frac{1}{2} r$. Ihr Inhalt ist also $\frac{1}{2} r^2 \times \frac{1}{6} r = \frac{1}{12} r^3$ und der Inhalt beider oder der Inhalt des Octaëders ist $= \frac{1}{6} r^3$.

Im Hexaëder. Die Seite des Hexaëders $= \frac{1}{3} r\sqrt{3}$ und sein Inhalt $= \left(\frac{1}{3} r\sqrt{3}\right)^3 = \frac{1}{27} r^3\sqrt{27} = \frac{1}{9} r^3\sqrt{3} = 0.1924501 \ldots r^3$

Im Dodecaëder Die Seite des Dodecaëders $= \frac{1}{6} r(\sqrt{15} - \sqrt{3})$
Ist r der Durchmesser eines Kreises, so ist die Seite eines in denselben beschriebenen Fünfecks $= r\sqrt{\frac{5}{8} - \sqrt{\frac{5}{64}}} = \frac{1}{4} r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
also der Inhalt des von 2 Halbmessern und der Seite des Fünfecks gebildeten Dreiecks $= r^2\sqrt{\frac{1}{288} - \frac{1}{1440}\sqrt{5}}$
und der Inhalt des Fünfecks $= r^2\sqrt{\frac{25}{288} - \frac{5}{288}\sqrt{5}}$
und die Oberfläche des Dodecaëders $= r^2\sqrt{\frac{25}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5}}$
Die senkrechte Höhe einer der 12 Pyramiden des Dodecaëders bildet mit dem Halbmesser der Kugel, in der jener Körper enthalten ist und mit dem Halbmesser des Kreises in dem das Fünfeck beschrieben ist, ein rechtwinkliges Dreieck. Es ist also diese Höhe
$= \sqrt{\left\{\frac{1}{4} r^2 - r^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{30}\sqrt{5}\right)\right\}}$ deren Drittel $= r\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{30}\sqrt{5}}$
und mit der Oberfläche des Dodecaëders multiplicirt gibt für den Inhalt des Dodecaëders
$r^3\sqrt{\frac{15}{216} + \frac{5}{216}\sqrt{5}} = \frac{1}{36} r^3\sqrt{90 + 30\sqrt{5}} = 0.3481455 \ldots r^3$

Im Icosaëder Die Seite des Icosaëders $= r\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}}$
also nach dem was man beim Tetraëder gefunden hat, ist der Inhalt einer Fläche $= r^2\sqrt{\frac{9}{160} - \frac{3}{160}\sqrt{5}}$

Eben so wie beim Tetraëder ist die Höhe einer der 20 Pyramiden des Icosaëders $= \sqrt{\left\{\frac{1}{4}r^2 - x^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{30}\sqrt{5}\right)^2\right\}}$ deren Drittel $= r\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{30}\sqrt{5}}$, also der Inhalt dieser Pyramide $= r^3\sqrt{\frac{1}{5760} + \frac{1}{28800}\sqrt{5}}$ und der Inhalt des ganzen Icosaëders $= r^3\sqrt{\frac{5}{72} + \frac{1}{72}\sqrt{5}} = \frac{1}{12}r^3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} =$

$$= 0.317018838765 0512 \ldots r^3$$

Sey AB der Durchmesser der gegebenen Kugel, deren Mittelpunct C, theilt man ihn so dass AG = 2GB, und BK = AB senkrecht auf AB. Man ziehe CK, BF und ziehe die Senkrechte FH. Ferner seyen die Linien CD, GE senkrecht auf AB und endlich sey die Linie BE in I nach stetiger Proportion geschnitten so dass BE : BI = BI : IE. Nach diesen Voraussetzungen ist nach Euclids Elementen 13. B. 18. Satz AE die Seite des Tetraëders — BD die Seite des Octaëders — BE die Seite des Hexaëders, BF die Seite des Icosaëders, und BI die Seite des Dodecaëders.

Aufgabe Es soll eine bequeme Formel für den cubischen Inhalt einer mit der Grundfläche parallel abgekürzten Pyramide gefunden werden. —

Es sey die kleinere Grundfläche p die größere P, die senkrechte Höhe a und die Höhe der ergänzten Pyramide x, so ist die Höhe der ergänzten Spitze $= x-a$ also, da bei den ähnlichen Körpern sich die gleichnamigen Flächen wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten verhalten,

$$p : P = (x-a)^2 : x^2 \text{ und } x = \frac{a\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}};\ x-a = \frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}$$

Es ist demnach der Inhalt der ganzen oder der ergänzten Pyramide $= \frac{\frac{1}{3}aP\sqrt{P}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}}$, und der Inhalt der Spitze

$$= \frac{\frac{1}{3}ap\sqrt{p}}{\sqrt{P}-\sqrt{p}};$$ folglich der Inhalt der

abgekürzten Pyramide $= \frac{1}{3}a(P+p+\sqrt{Pp})$.

Diese Formel gibt auch den Inhalt eines abgekürzten Kegels. Ist bei einem solchen Kegel außer der Höhe a, der Halbmesser der kleineren Grundfläche $= r$, und der größeren $= R$ gegeben; so ist sein Inhalt

$$= \frac{1}{3}a\pi(R^2+r^2+Rr)$$

oder $= \frac{1}{4}a\pi(R+r)^2 + \frac{1}{12}a\pi(R-r)^2$

weil $R^2+r^2+Rr = (R+r)^2 - Rr$

$R^2+r^2+Rr = (R-r)^2 + 3Rr$

Seine ganze Oberfläche

$$= \pi(R+r)(R-r+a)$$

wenn a die Länge der krummen Fläche bedeutet, und der Inhalt der krummen Fläche $= a\pi(R+r)$. ——

Ist a die Höhe eines Kegels und r der Halbmesser seiner Grundfläche, so ist sein Inhalt $= \frac{1}{3}ar^2\pi$. Seine krumme Seitenfläche deren Länge a' seyn soll, ist $= a'r\pi$ und seine ganze Oberfläche $= r\pi(a'+r)$. —

Der Inhalt eines Cylinders, dessen Halbmesser $= r$, und dessen Höhe $= a$, ist $= ar^2\pi$, und seine Oberfläche $= 2r\pi(a+r)$.

Aus zwei Seiten und eines eingeschlossenen Winkels eines geradlinigten Dreiecks die dritte Seite zu finden, nimmt man gewöhnlich die Formeln

$$tg\,x = \frac{2\sqrt{ab}\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma}{a-b} \quad \text{und} \quad c = \frac{a-b}{\cos x}$$

wenn die zwei Seiten a, b mit dem eingeschlossenen Winkel γ gegeben sind und c die gesuchte Seite ist. — Diese Formeln erhält man aus der Gleichung

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$
$$= a^2+b^2-2ab(1-2\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2)$$
$$= (a-b)^2+4ab\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2$$

also $\frac{c^2}{(a-b)^2} = 1+\frac{4ab\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}$

setzt man $tg\,x^2 = \frac{4ab\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma^2}{(a-b)^2}$

so erhält man obige Formeln.

Man kann aber folgende Formeln anwenden, die mehr Bequemlichkeit darbieten. Nennt man φ die Differenz der gesuchten Winkel, so wissen wir dass $tg\,\varphi = \frac{a-b}{a+b}\,ctg\,\frac{1}{2}\gamma$

Aus der Gleichung $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ erhält man $c = (a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma\sqrt{1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 tg\,\frac{1}{2}\gamma^2}$

indem man a^2 und b^2 mit $\cos\frac{1}{2}\gamma^2+\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma^2$ jede dieser Größen multiplicirt und statt $\cos\gamma$, $\cos\frac{1}{2}\gamma^2-\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma^2$ einführt. — Führt man nun in die letzte Gleichung den Hülfswinkel φ ein, so bekommt man

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$$

oder

$$c = \frac{(a+b)\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\gamma}{\cos\varphi}$$

Formeln aus der analytischen Geometrie

Die Linien in der Ebene betrachtet

$x = a$, $y = 0$ } sind die Gleichungen eines Punktes in der Axe x

$x = 0$, $y = b$ } — — — — — — — — y

$x = 0$, $y = 0$ } — — — — des Anfangspunctes

$x = a$, $y = b$ } — — — — eines Punktes überhaupt

$y = ax + b$ ist die Gleichung einer Linie wo a ~~ist~~ die Tangente des mit der Axe x Winkels, und b die Entfernung des Durchschnittspunctes dieser Linie mit der Axe y von Anfangspunkte, bedeutet.

~~$y = ax + b$, $y' = a'x' + b'$ } sind die Gleichungen der durch 2 Punkte gehenden Linie~~

$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} = r$ ist die Länge der Linie die 2 Punkte verbindet

$y = b + \frac{x \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ diese Gleichung ist die allgemeinste der geraden Linie; α ist der Winkel den diese Linie mit der Axe x, und β den die Coordinaten-Axen unter sich bilden

$x = a$, $y = b$ } jede dieser Gleichungen für sich betrachtet, gehören die erste der der Axe y und die andere der der Axe x parallelen Linie

$y - y' = a(x - x')$ ist die Gleichung der durch den Pkt x'; y' gehenden Linie

$y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x - x')$ Gleichung der durch 2 Pkte x', y'; x'', y'' gehenden Linie

$y = ax + b$, $y = a'x + b'$ } Gleichungen der zwei Linien

Sind diese Linien parallel, so ist $a = a'$

sind sie aufeinander senkrecht — $1 + aa' = 0$

Ihr Winkel ω, so ist tg — — $\operatorname{tg}\omega = \frac{a'-a}{1+aa'}$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes obiger zwei Linien die man ξ und v nennen will sind

$$\xi = \frac{b'-b}{a-a'} \qquad v = \frac{ab'-a'b}{a-a'}$$

$y-y' = \frac{x'-x}{a}$ ist die Gleichung der durch den Pkt $x'.y'$ auf die gegebene Gerade senkrechten Linie

$\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}$ ist der Ausdruck des Lothes zwischen dem Pkt $x'.y'$ und der gegebenen Linie

2° Die geraden Linien im Raume

$\left.\begin{array}{l} x = az+\alpha \\ y = bz+\beta \end{array}\right\}$ die Linie I $\qquad \left.\begin{array}{l} x = a'z+\alpha' \\ y = b'z+\beta' \end{array}\right\}$ die Linie II

$\left.\begin{array}{l} x=a \\ y=b \\ z=c \end{array}\right\}$ sind Gleichungen eines Punktes,
Die zwey ersten für sich betrachtet gehören der Projection seines Pkts in der Ebene xy, oder auch, sie sind die Gleichungen einer Linie die mit der Axe z parallel ist. — Jede dieser Gleichungen für sich allein betrachtet, gehört einer Ebene die mit der Coordinaten Ebenen respective parallel ist, nehmlich:

~~III~~ $x=a$ der mit yz parallelen Ebene
$y=b$ — — — xz —
$z=c$ — — — xy — —

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$ Gleichungen der Axe z und so von den andern Axen

$x=0$ Gleichung der Ebene yz

$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x=az+\alpha \end{array}\right\}$ Gleichungen einer Linie in der Ebene xz

$x = az + \alpha$
$y = bz + \beta$ } Linie durch die
$x' = az' + \alpha$ Punkt $x'.y'z$
$y' = bz' + \beta'$

$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z')$
$y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z')$ } durch die Pkte $x'y'z$ u. $x''y''z''$

$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ die Entfernung zweier Punkte

$x = az + \alpha$
$y = bz + \beta$ I
$x = a'z + \alpha'$
$y = b'z + \beta'$ II

sind die zwey Linien parallel so ist $a = a'$, $b = b'$
Ihr Winkel ω ist

$$\cos\omega = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$$

sind sie senkrecht, so ist $1 + aa' + bb' = 0$

Ist X der Winkel den eine Gerade mit der Axe x bildet
Y – – – – – – – – –
Z – – – – – – – – – – z

so ist $\cos X = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$ und so von den andern

also $\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1$

(denn $\cos Y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, $\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$)

Die Bedingung daß sich die Linien I und II schneiden

ist $(a-a')(\beta-\beta') - (\alpha-\alpha')(b-b') = 0$ und die Coord. des Durchschnittspunktes ξ, v, ζ, sind

$$\xi = \frac{a\alpha' - a'\alpha}{a - a'},\quad v = \frac{b\beta' - b'\beta}{b - b'},\quad \zeta = \frac{\alpha' - \alpha}{a - a'} = \frac{\beta' - \beta}{b - b'}$$

$x = \alpha$
$y = \beta$ } Coord. des Pktes in dem die I die Ebene xy schneidet

$x = \alpha - \frac{a\beta}{b}$
$z = -\frac{\beta}{b}$ } – – – – – – – – xz

$y = \beta - \frac{b\alpha}{a}$
$z = -\frac{\alpha}{a}$ } – – – – – – – yz

Ist m der Winkel der I gerade mit der Ebene xy
n — — — — — — — — — xz
p — — — — — — — — — yz

so ist $\sin m = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$

$\sin n = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$

$\sin p = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$

Ebenen

$\left.\begin{array}{l} x=az+\alpha \\ y=bz+\beta \end{array}\right\}$ die Linie und $\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D=0 \end{array}\right\}$ die Ebene I — — II

In der Ebene I ist $+\frac{A}{C}$

$-\frac{A}{C}$ die Tang. des Winkels der Knotenlinie in xy mit x
$-\frac{B}{C}$ — — — — — — — — yz — y
$-\frac{A}{B}$ — — — — — — — — xy — x

Die Entfernung des Anfangspunktes von dem Punkte wo die Ebene I schneidet die Axe der x ist $= -\frac{D}{A}$
y $= -\frac{D}{B}$
z $= -\frac{D}{C}$

Die Gleichungen der Knotenlinie
in xz sind $y=0$, $Cz+Ax+D=0$
yz — — $x=0$, $Cz+By+D=0$
xy — — $z=0$, $Ax+By+D=0$

Eliminiert man zwischen zwei Ebenen die Größe z so erhält man die Projektionen ihrer Durchschnitts in xy

$Cx + Ay + B = 0$ die Ebene stehet senkrecht auf xy
$Cx + Az + B = 0$ — — — — — — — xz
$Cy + Az + B = 0$ — — — — — — — yz

$\left.\begin{matrix} A = aC \\ B = bC \end{matrix}\right\}$ ist die Bedingung dass die Ebene I auf die Linie I senkrecht stehe

$Aa + Bb + C = 0$ die Gerade I ist der Ebene I parallel

$\left.\begin{matrix} Aa + Bb + C = 0 \\ A\alpha + B\beta + D = 0 \end{matrix}\right\}$ die Linie I liegt ganz in der Ebene I.

$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ist die Größe des Lothes von dem Anfangspunkte auf die Ebene I, und die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieses Lothes mit der Ebene I sind

$$\xi = -\frac{AD}{A^2+B^2+C^2}, \quad v = -\frac{BD}{A^2+B^2+C^2}, \quad \zeta = -\frac{DC}{A^2+B^2+C^2}$$

und die Gleichungen dieses Lothes aus dem Anfangspkte ~~ist~~ sind $xC = zA$, $yC = zB$

Ist ω der Winkel der Linie I ~~x~~ mit der Ebene I,

so ist $$\sin\omega = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1+a^2+b^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ist ξ der Winkel der Ebene I mit der Ebene xy
v — — — — — — xz
ζ — — — — — — yz

so ist
$$\cos\xi = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$\cos v = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$\cos\zeta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

also

$$\cos^2\xi + \cos^2 v + \cos^2\zeta = 1$$

Ist ω der Winkel den die zwei Ebenen I u. II mit[einander]
sich bilden, so ist

$$\cos\omega = \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Sind diese Ebenen auf einander senkrecht so ist

$$AA'+BB'+CC'=0$$

Sind sie parallel, so ist

$$\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'}, \quad \frac{B}{C}=\frac{B'}{C'}$$

Gehet die Ebene I durch die Pkte $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$
so ist

$$Ax+By+Cz+D=0$$
$$Ax'+By'+Cz'+D=0$$
$$Ax''+By''+Cz''+D=0$$
$$Ax'''+By'''+Cz'''+D=0$$

und

$$A=y'(z''-z''')-y''(z'-z''')+y'''(z'-z'')$$
$$B=z'(x''-x''')-z''(x'-x''')+z'''(x'-x'')$$
$$C=x'(y''-y''')-x''(y'-y''')+x'''(y'-y'')$$
$$D=x'(y''z'''-y'''z'')-x''(y'z'''-y'''z')+x'''(y'z''-y''z')$$

Ist dann T die Fläche des Dreieckes zwischen den 3 vori-
gen Punkte und t dessen Projection in xy
t' — — — xz
t'' — — — yz

so ist $A=2t$, $B=2t'$, $C=2t''$
$t=ATP$, $t'=BTP$, $t''=CTP$ wo $P=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
und $T^2=t^2+t'^2+t''^2$

Endlich ist $\frac{D}{6}=\frac{TDP}{3}$ der körperliche Inhalt der Pyramide
dessen Basis T und dessen Spitze der Anfangspunkt der Coor-
dinaten ist. —

Kegelschnitte

1° Kreis, sey r der Halbmesser und $d=2r$.

Peripherie des Kreises ---- $2r\pi$ $(\pi = 180)$

Fläche — $r^2\pi$

Fläche eines Sectors von n Graden ---- $n\frac{r^2\pi}{360}$

Fläche eines Segmentes von n Graden $= r^2 \cdot \frac{1}{2}\left(n\frac{\pi}{180} - \sin n\right)$

Oberfläche der Kugel — $4r^2\pi$

Körperlicher Inhalt der Kugel -- $= \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist:

$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$

für die Ellipse ist immer $B^2 - 4AC < 0$ oder negative

für den Kreis ist $A=C$ und $B=0$. — Die Coordinaten des Mittelpunktes sind $-\frac{D}{2A}$, $-\frac{E}{2A}$, und der Halbmesser $= \sqrt{\frac{D^2+E^2-4AF}{2A}}$. —

für die Parabel ist $B^2-4AC=0$, oder was dasselbe ist, die drei ersten Glieder, $Ay^2+Bxy+Cx^2$, bilden vollständiges Quadrat. —

für die Hyperbel ist $B^2-4AC>0$ oder positive.

Die allgemeine Gleichung der Tangente zu jeder krummen Linie der zweiten Ordnung, ist

$y-y' = -\frac{By'+2Cx'+E}{Bx'+2Ay'+D}(x-x')$ wo $x'y'$ sind Coordinaten des Berührungspunktes

Fläche einer Ellipse ---- $\pi ab = \pi a\sqrt{a^2-e^2}$

e Excentricität

Krumme Linien

Parabel - - - - $y^2 = px$
Ellipse - - - - $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$
Hyperbel - - - - $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$

Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in Polar-Coordinaten ist

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \omega}$$

wo ω wahre Anomalie vom Perihel, r Radius vector
a halbe grosse Axe
$a\varepsilon$ Excentricität
p halbe Parameter
~~φ Distanz des Perihel~~

für Parabel ist $\varepsilon = 1$
Ellipse - - $\varepsilon < 1$
Hyperbel - - - $\varepsilon > 1$

Neil Parabel - - - $y^3 = ax^2$
Tractoria - - - $\frac{y\,dx}{dy} = \sqrt{a^2 - y^2}$; $x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \log. \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ wo $a = \frac{y\,ds}{dy}$ = der Länge constanten Tangente
Quadratica Dinostrati $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r}$
Logarithmica - - - - $y = e^{\frac{x}{m}}$ wo m modulus
Spiralis Parabolica $r^2 \varphi = 2\pi (z - r)^2$
Cissoide Diocles $y^3 + yx^2 = 2ax^2$
Spiralis Archimedes - - - $2\pi z = r\varphi$
Conchoide Nicomedes $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2 x^2$
Logistik - - - $\frac{x}{b} = m \log. \frac{y}{a}$
Spiralis Hyperbol. $z(\alpha + \varphi) = a\alpha$
Kettenlinie - - $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; $y = a \log. \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$
Cycloide - - - - $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}$ - - - a ist der Halbmesser

Die letzte Gleichung leitet man aus der ursprünglichen Gleichung der Cycloide ab die folgende ist

$x = \text{Arc Sin. vers.}\, y - \sqrt{2ay - y^2}$ und $d\,\text{Arc} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Parabel

t Zeit seit dem Durchgang durchs Perihel
$k = 0.0172021$
e ... excentrische Anomalie
m ... mittlere Anomalie vom Perihel

$$r = \frac{p}{2\cos^2\frac{\omega}{2}} \;\Big|\; \frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}} = tg\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{\omega}{2} \text{ oder } (0.9122791)\,t\,q^{-\frac{3}{2}} = 75\,tg\frac{\omega}{2} + 25\,tg^3\frac{\omega}{2}$$

wo $(0.9122791)\,q^{-\frac{3}{2}}$ die mittlere tägliche Bewegung ist, und q Distanz des Perihels.

Ellipse

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\omega} = \frac{q(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos\omega} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\omega} \;\Big|\; \cos e = \frac{\varepsilon+\cos\omega}{1+\cos\omega} \;\Big|\; tg\frac{e}{2} = tg\frac{\omega}{2}\,tg\frac{90-\varphi}{2}$$

und $\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = e - \varepsilon\sin e = m$

wo $\sin\varphi = \varepsilon$, $tg\frac{90-\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$

$$r = a(1-\varepsilon\cos e) = \frac{a\cos\varphi\sin e}{\sin\omega}$$

Hyperbel.

$$\cos\psi = \frac{1}{\varepsilon}, \quad p = q(\varepsilon+1) = a(\varepsilon^2-1)$$

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\omega} \;\Big|\; \cos e = \frac{1+\varepsilon\cos\omega}{\varepsilon+\cos\omega} \;\Big|\; tg\frac{e}{2} = tg\frac{\omega}{2}\,tg\frac{\psi}{2}$$

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = \varepsilon\,tg\,e - 2.30258509\,\log.\text{brigg.}\,tg\,\frac{90+e}{2}$$

Ellipse

$$dm = \frac{r^2 d\omega}{a^2\cos\varphi} - \frac{r(a+r-a\varepsilon^2)\sin\omega\,.\,d\varphi}{a^2\cos^2\varphi}$$

$$dr = \frac{r\,da}{a} + a\,tg\varphi\sin\omega\,dm - a\cos\varphi\cos\omega\,d\varphi - \varepsilon = \sin\varphi$$

Fläche eines Sectors $= \frac{1}{2}k(t'-t)\sqrt{p}$ wo $(t'-t)$ die Zwischenzeit ist.

$$\frac{e}{2} = \frac{\omega}{2} - b\sin\omega + \frac{b^2}{2}\sin 2\omega - \frac{b^3}{3}\sin 3\omega + \ldots \quad b = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$tg\frac{\omega}{2} = \frac{e}{2} + b\sin e + \frac{b^2}{2}\sin 2e + \frac{b^3}{3}\sin 3e + \ldots$$

$$m = \omega - 2\varepsilon \sin\omega + 2b\left(\varepsilon - \frac{b}{2}\right)\sin 2\omega - 2b^2\left(\varepsilon - \frac{2b}{3}\right)\sin 3\omega + 2b^3\left(\varepsilon - \frac{3b}{4}\right)\sin 4\ldots$$

$$e = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2.2}\cdot 2\sin 2m + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^2}(3^2\sin 3m - 3\sin m) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4.2^3}(4^3\sin 4m - 4.2^3\sin 2m)$$

$$\omega = m + \left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4} + \frac{5\varepsilon^5}{2^5.3}\right)\sin m + \left(\frac{5}{4}\varepsilon^2 - \frac{11\varepsilon^4}{2^3.3}\right)\sin 2m +$$

$$+ \left(\frac{13}{2^2.3}\varepsilon^3 - \frac{43\varepsilon^5}{2^5}\right)\sin 3m + \frac{103\varepsilon^4}{2^5.3}\sin 4m + \frac{1097}{2^6.3.5}\sin 5m$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos m - \frac{\varepsilon^2}{1.2}(\cos 2m - 1) - \frac{\varepsilon^3}{1.2.2^2}(3\cos 3m - 3\cos m) -$$

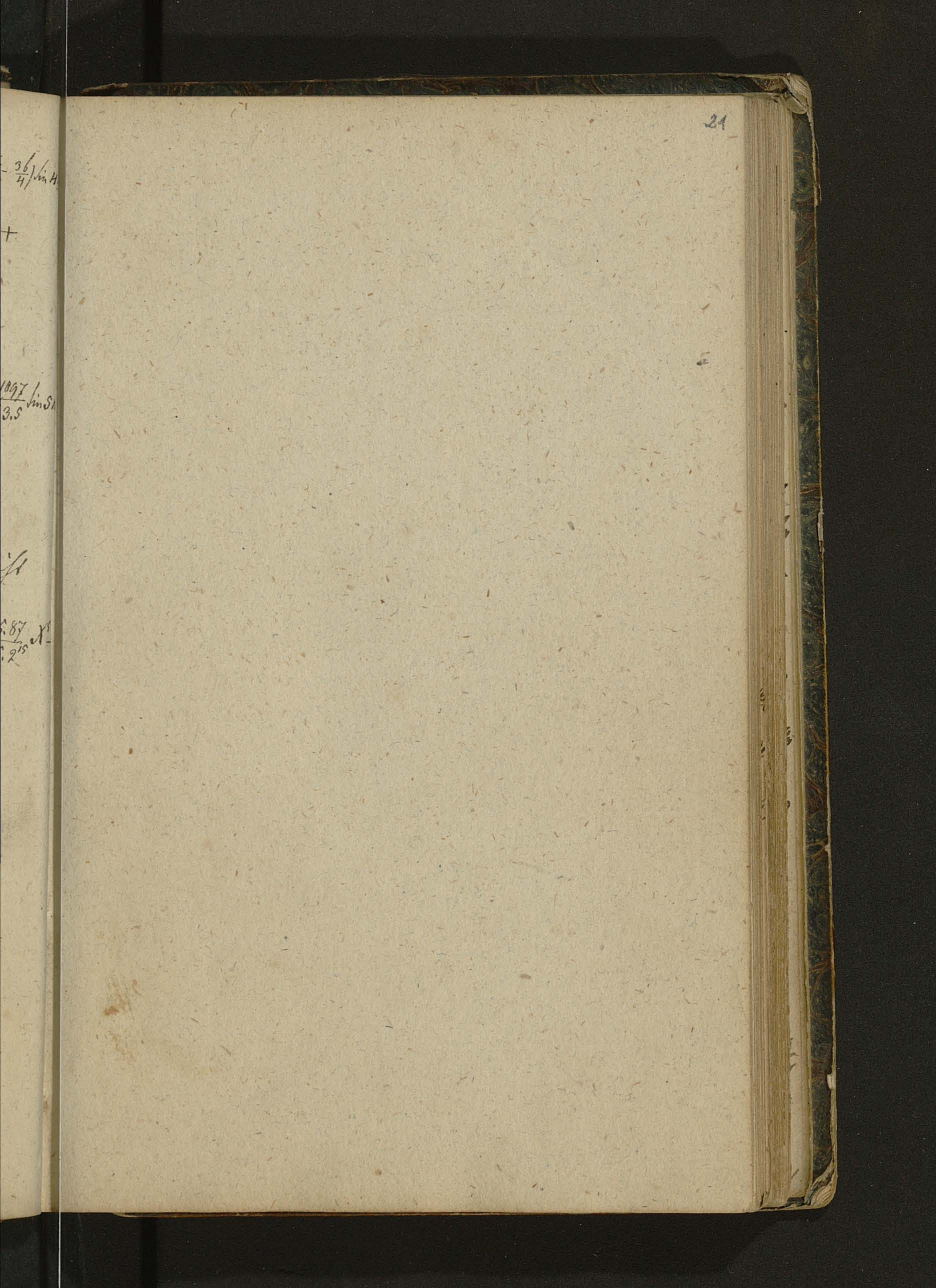
$$- \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.2^3}(4^2\cos 4m - 4.2^2\cos m) \ldots$$

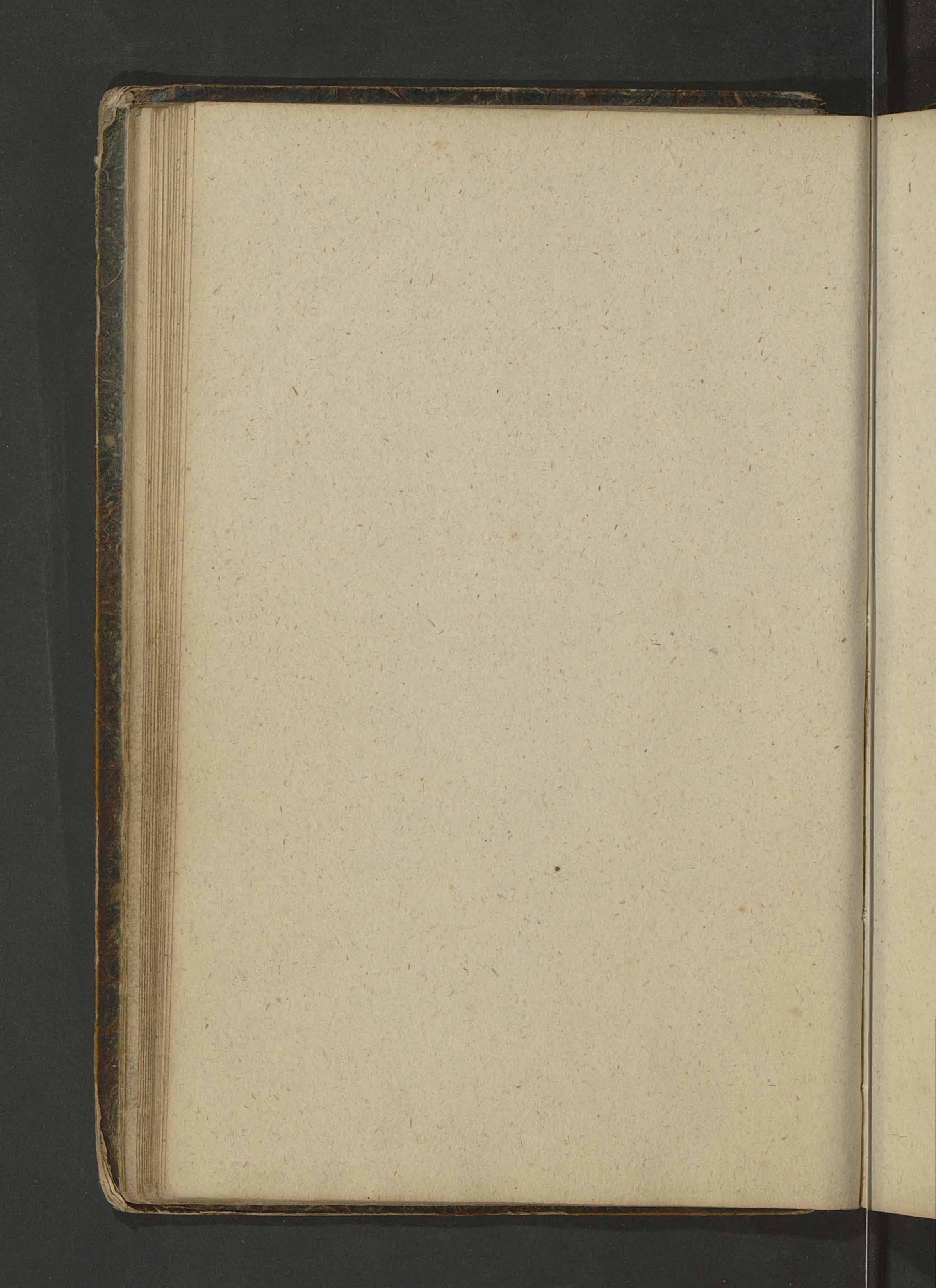
Ist X die größte Mittelpunktsgleichung, so ist

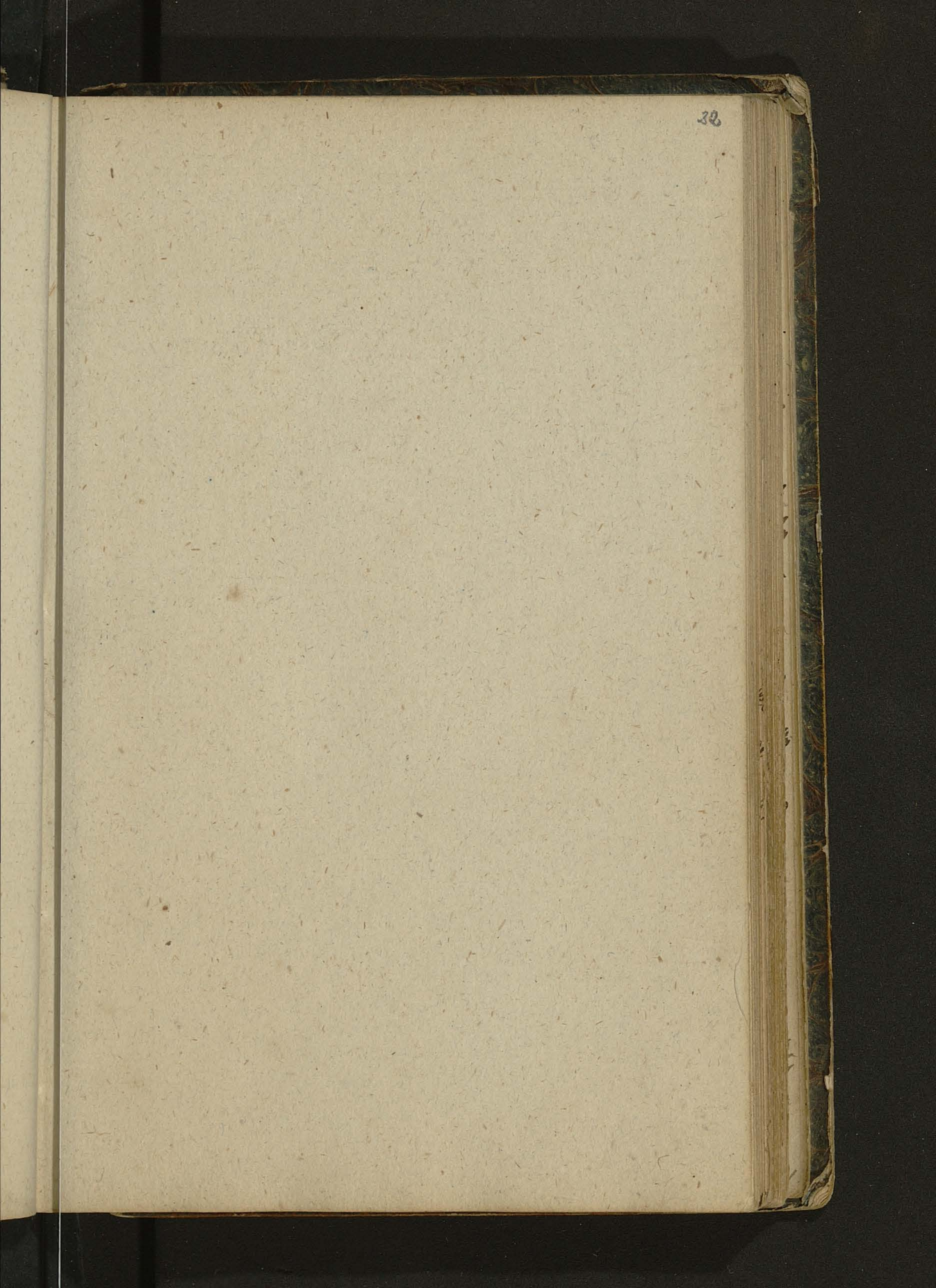
$$X = 2\varepsilon + \frac{11}{48}\varepsilon^3 + \frac{599}{5120}\varepsilon^5 + \ldots \text{ und } 2\varepsilon = X - \frac{11 X^3}{3.2^7} - \frac{5.87}{3.5.2^{15}}X^5 - $$

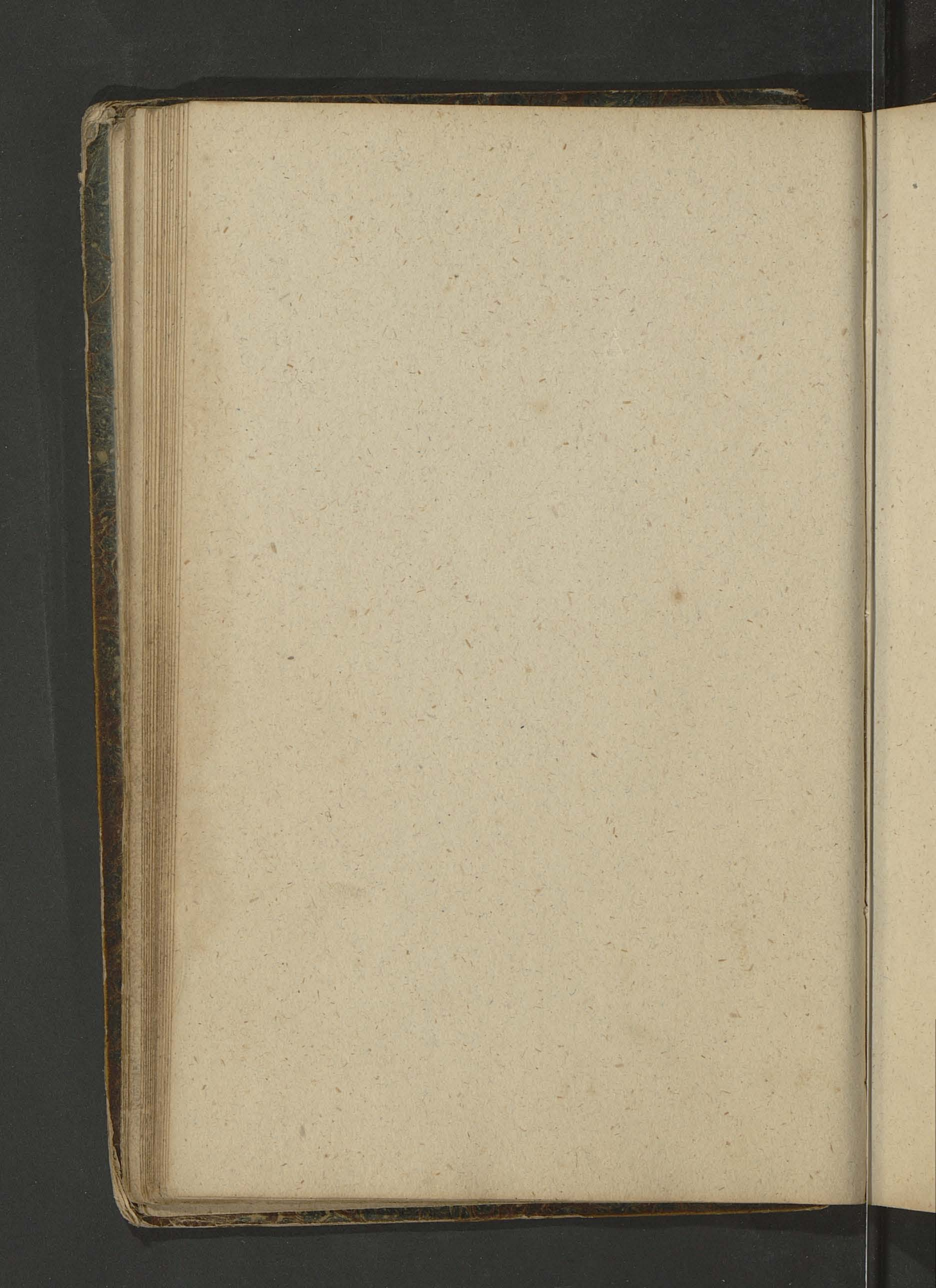
$$\partial\omega = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\, dm + \frac{(2 + \varepsilon\cos\omega)\sin\omega}{\cos\varphi}\cdot\partial\varphi$$

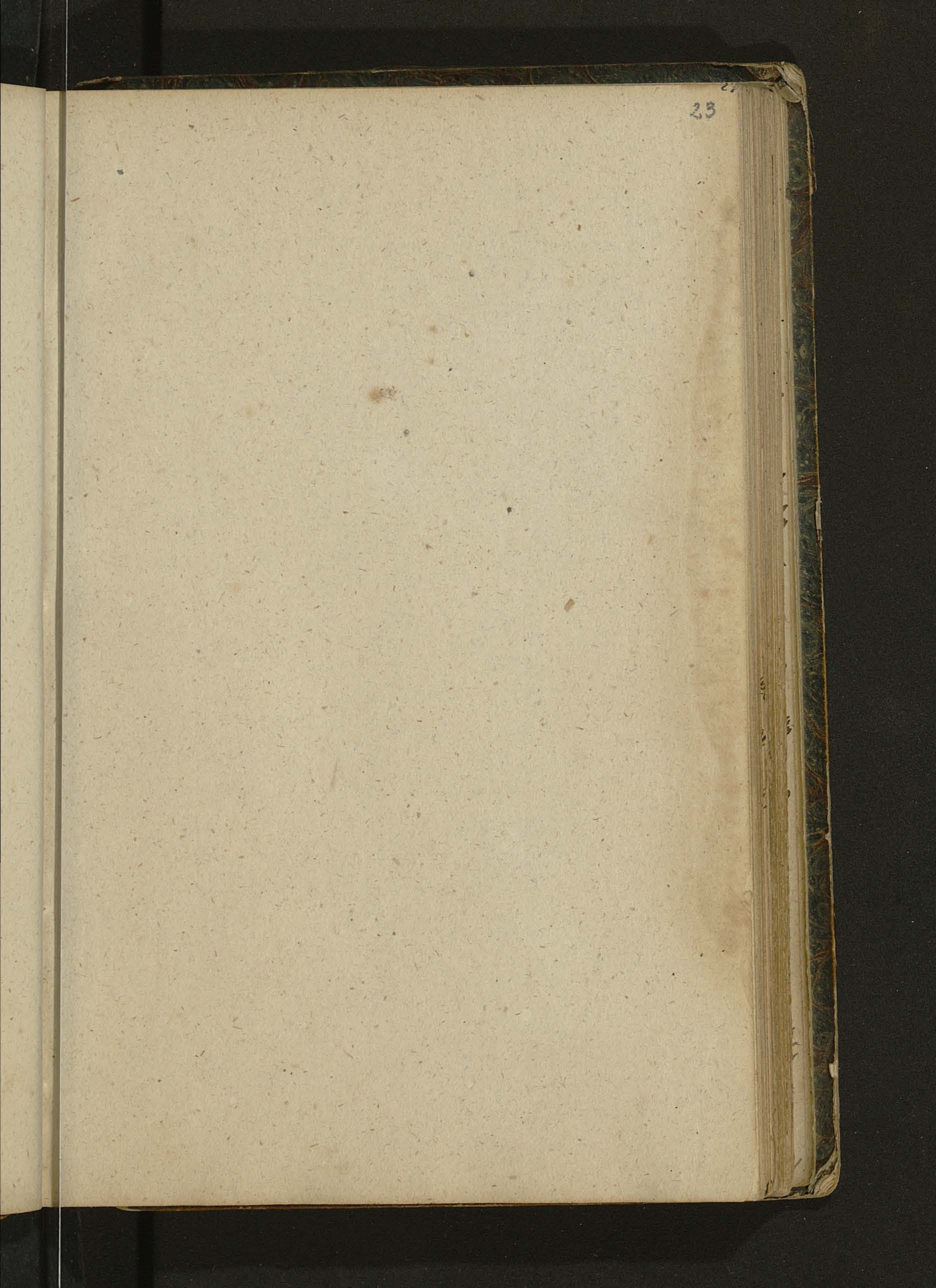
$$de = \frac{a}{r}dm = \frac{r\,d\omega}{a\cos\varphi} = \frac{dr}{a\varepsilon\sin e}$$

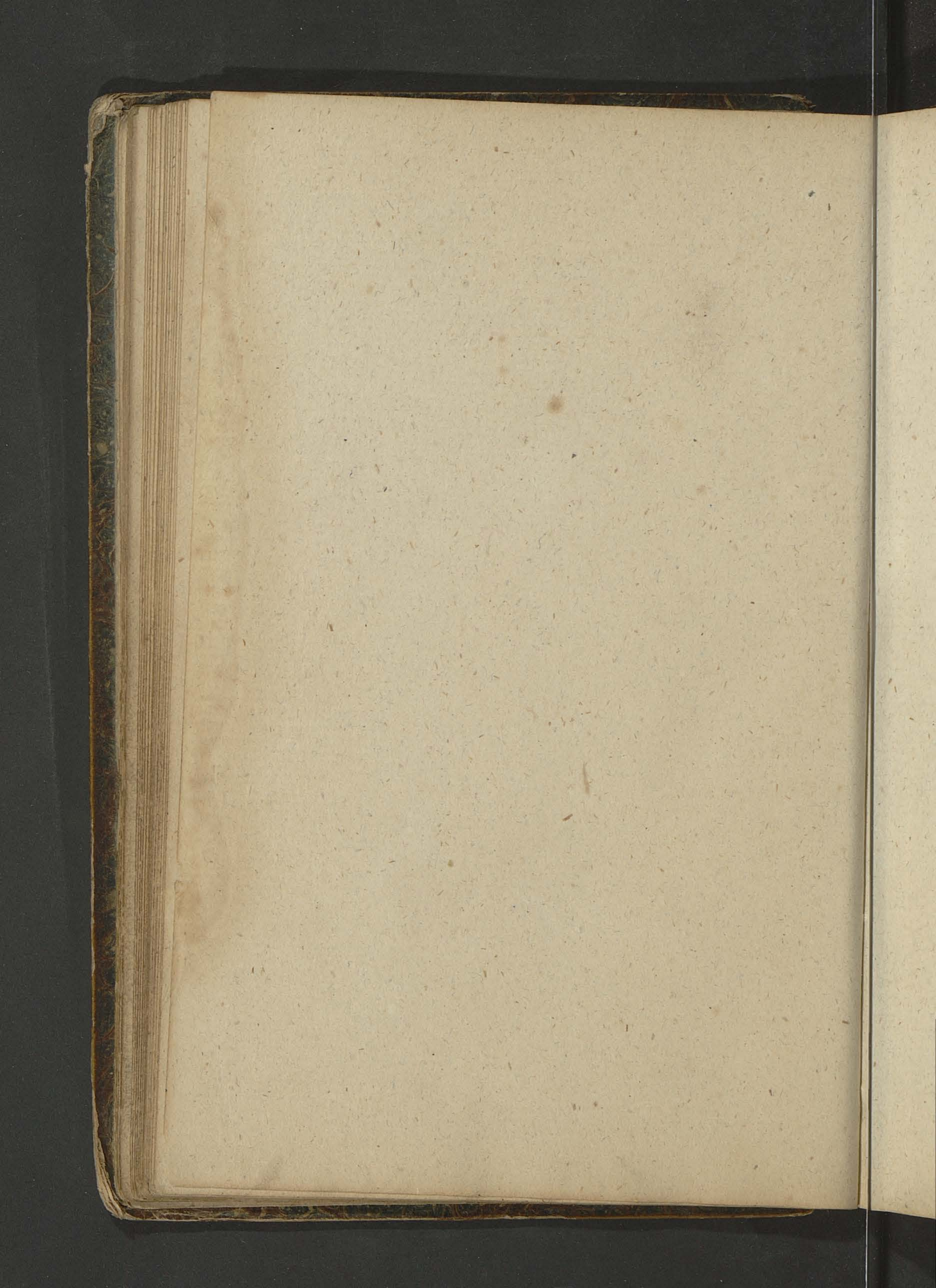


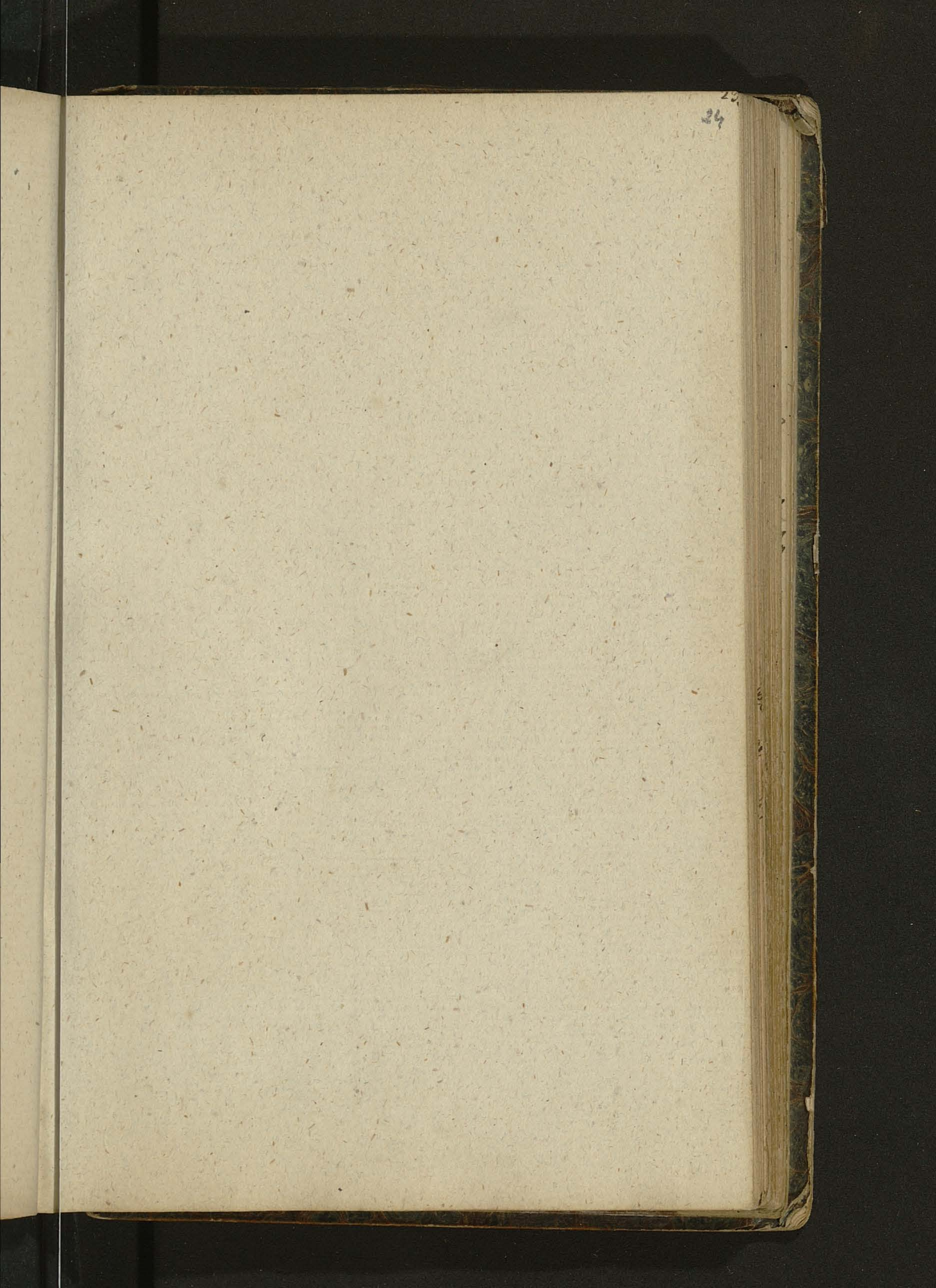


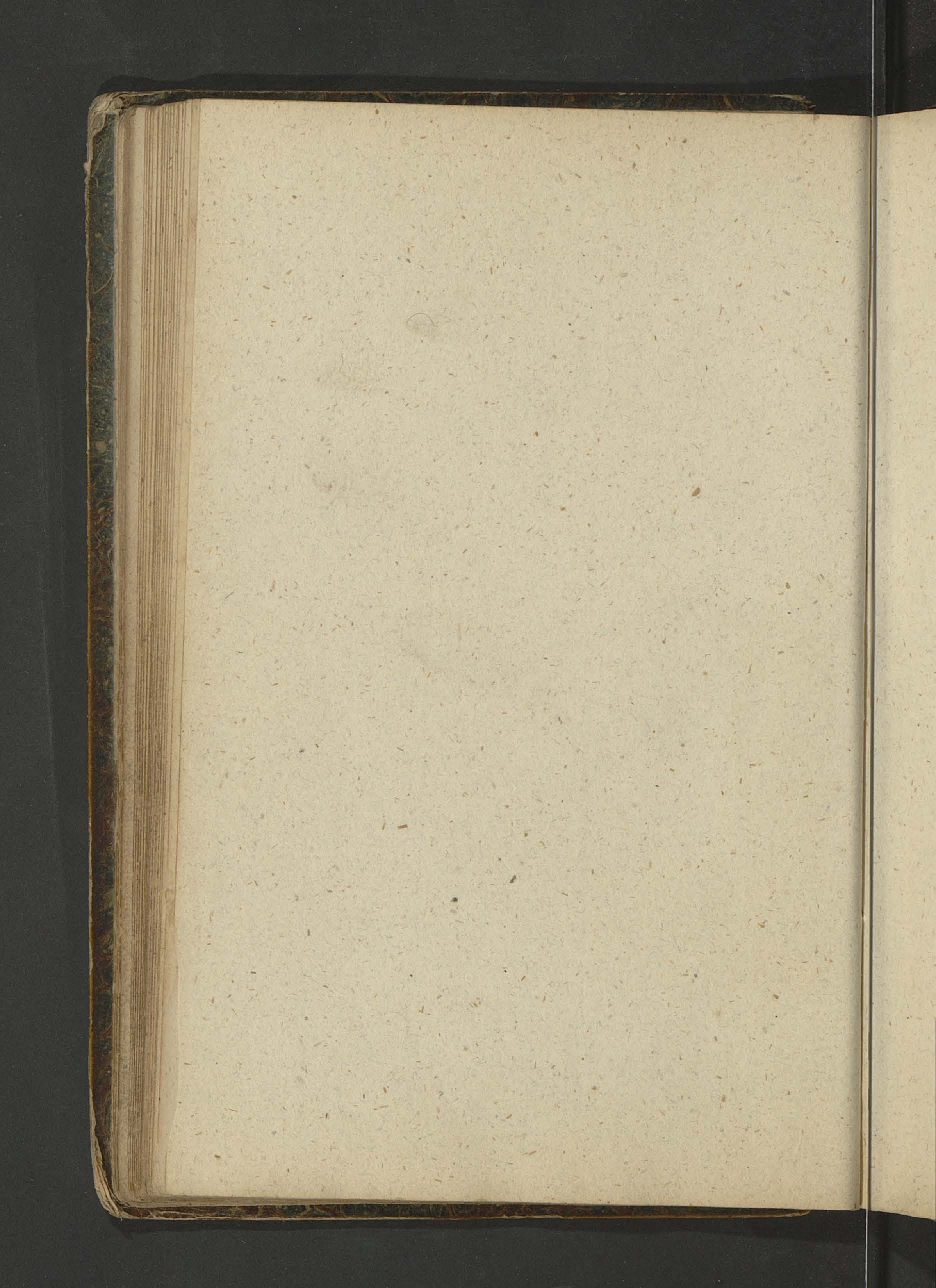


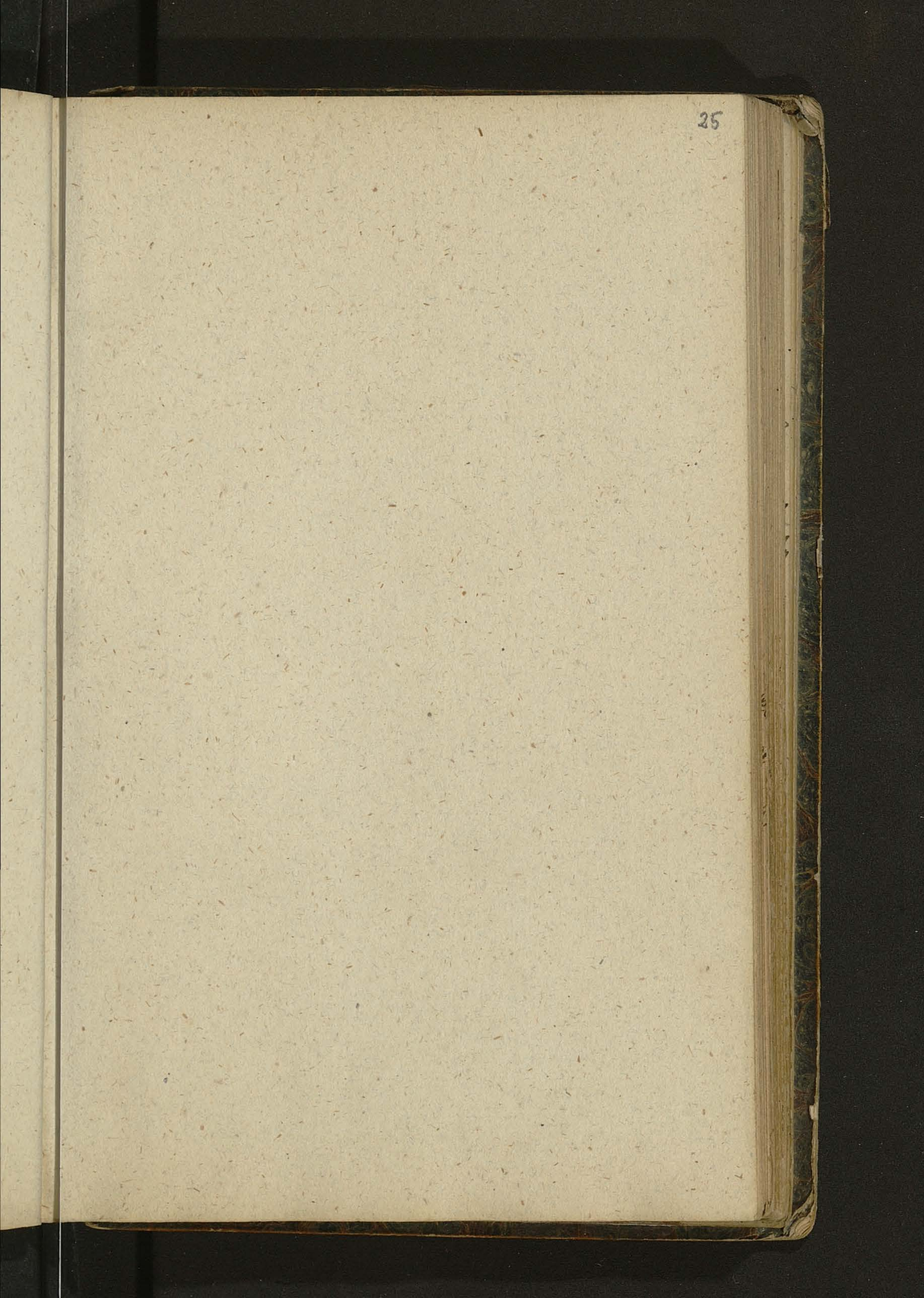


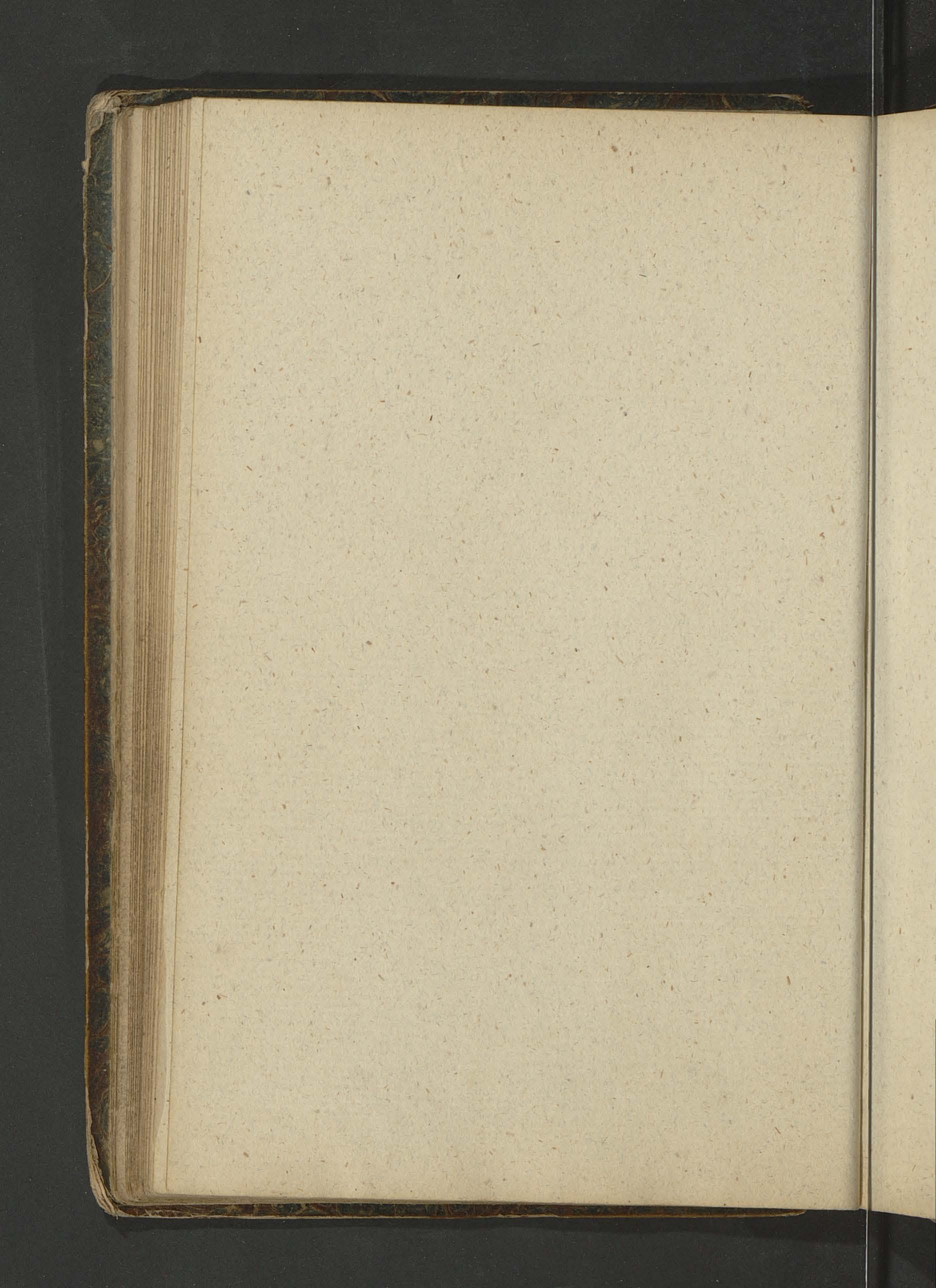


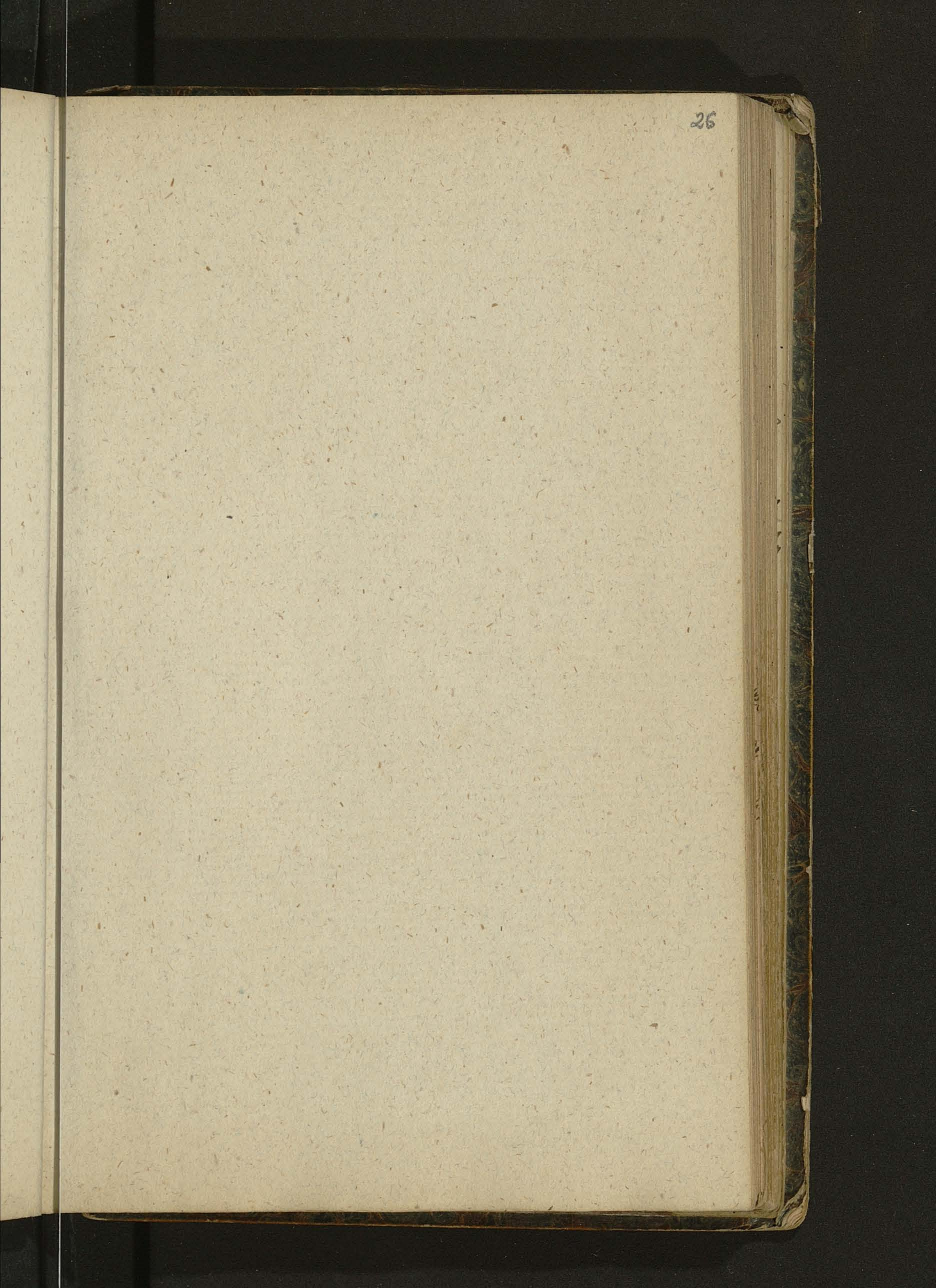


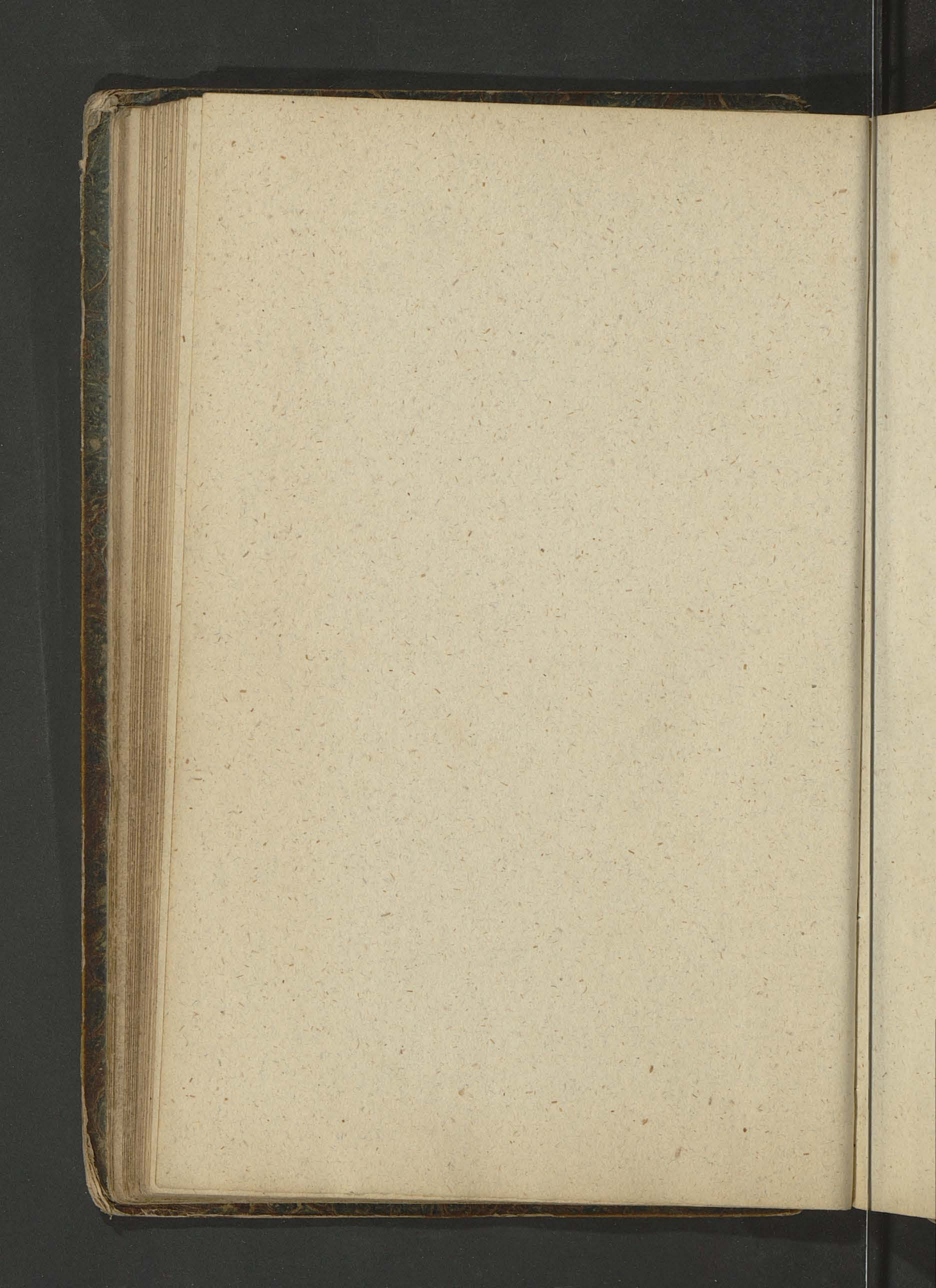


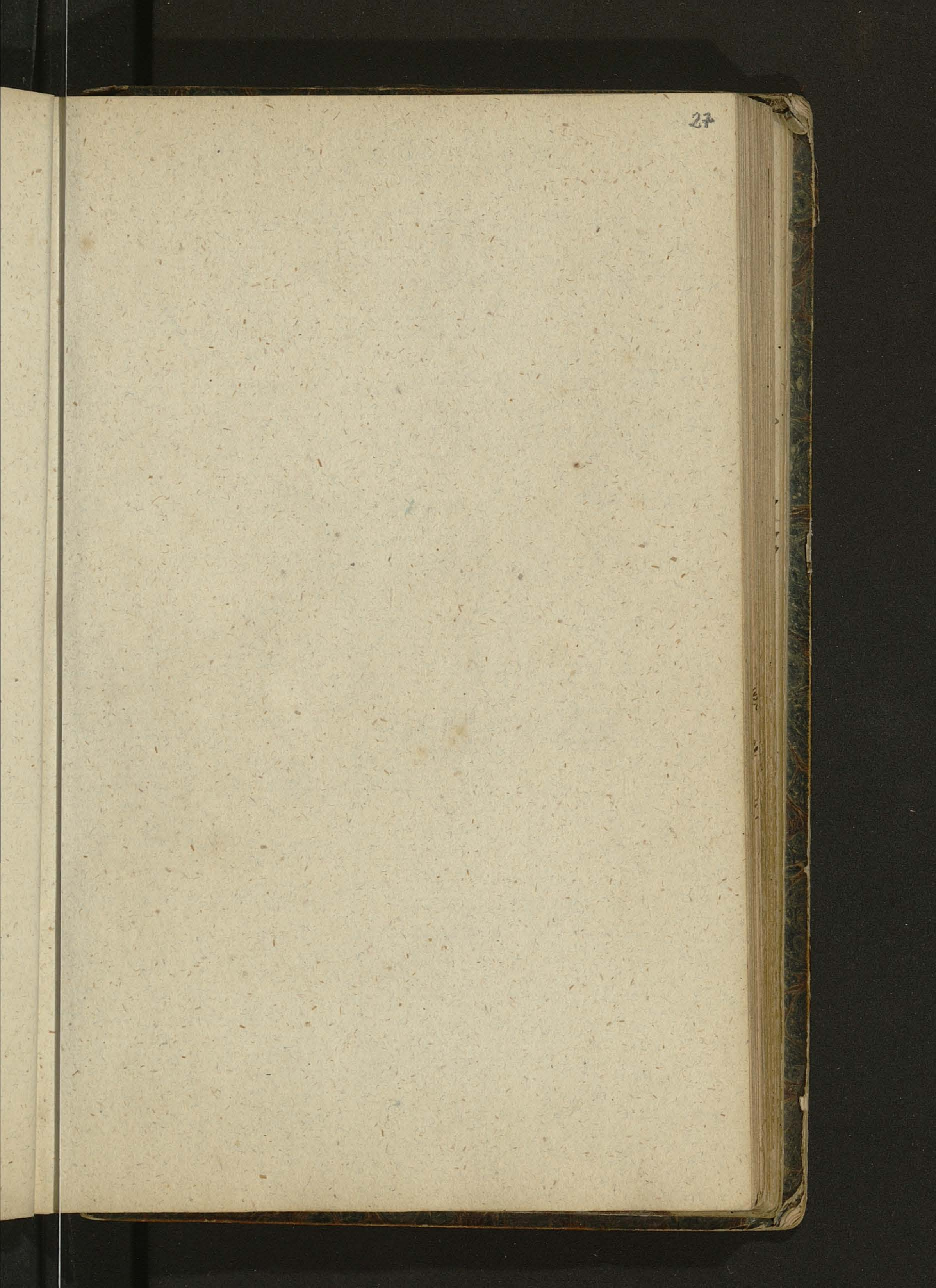












Differentialrechnung.

$y = ax$ --- $dy = a\,dx$ ---- $\frac{dy}{dx} = a$

$y = a^x$ --- $dy = a^x \log. a\, dx$ | $d\log. x = \frac{dx}{x}$ | $d.\,Log.\, x = m.\, \frac{dx}{x}$

Taylor'sche Reihe ist folgend:

$y = f(x)$, wenn x in $x+h$ übergeht, so ist

$$y' = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Wenn ~~x~~ s im ~~Kreis~~ Bogen ist, so hat man

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+p^2}, \text{ wenn } p = \frac{dy}{dx}$$

$y = \sin x$ --- $dy = dx \cos x$ $\qquad d\sin^2 x = +2\,dx \sin x \cos x$

$y = \cos x$ --- $dy = -dx \sin x$ $\qquad d\cos^2 x = -2\,dx \sin x \cos x$

$y = tg\, x$ --- $dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$ $\qquad d\,tg^2 x = \frac{2\,dx\, tg\, x}{\cos^2 x}$

$y = ctg\, x$ --- $dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ $\qquad d.\,ctg^2 x = -\frac{2\,dx\, ctg\, x}{\sin^2 x}$

$y = \sec x$ --- $dy = \frac{dx \sin x}{\cos^2 x}$

$y = cosec\, x$ --- $dy = -\frac{dx \cos x}{\sin^2 x}$

Wie man weiß ist $\sin vers.\, x = 1 - \cos x$ und
$\cos vers.\, x = 1 - \sin x$

deswegen ist

$y = \sin vers\, x$ ---- $dy = dx \sin x$

$y = \cos vers\, x$ ---- $dy = -dx \cos x$

$d.\,x^y = y x^{y-1} dx + x^y dy.\, \log x$

$y = \sin x$ und $x = \text{Arc}\sin y$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = \cos x$ ---- $dx = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

$y = \text{tg}\, x$ ------ $dx = \frac{dy}{1+y^2}$

$y = \text{ctg}\, x$ ------ $dx = -\frac{dy}{1+y^2}$

$y = \sec x$ ------ $dx = \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$

$y = \text{cosec}\, x$ ---- $dx = -\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$

$y = \sin\text{vers.}\, x$ --- $dx = \frac{dy}{\sqrt{y(2-y)}}$

$y = \cos\text{vers.}\, x$ --- $dx = -\frac{dy}{\sqrt{y(2-y)}}$

Das Differential der Subtangente $= \frac{y\,dx}{dy}$

Subnormale $= \frac{y\,dy}{dx}$

Tangente $= y\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}} = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$

Normale $= y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$

Das Differential eines Segmentes $= y\,dx$

z. B. $x^2+y^2=a^2$ ist die Gleichung eines Kreises

also wenn s ein Segment heißt -- $ds = dx\sqrt{a^2-x^2}$

Das Differential einer Tangente ist auch folgend $y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x)$

Das Differential eines Krümmungshalbmessers, der γ heissen soll ist

$$\gamma=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$$

und dabey

$$x-\alpha=\frac{dy(dx^2+dy^2)}{dx\,d^2y}$$

$$y-\beta=-\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

Die zwei letzten Gleichungen drücken die Coordinaten des Mittelpunctes des Krümmungskreises dessen Halbmesser γ aus. Der Kreis heisst auch oskulirender Kreis. Dieser Krümmungshalbmesser wird aus der Betrachtung einer Curve und eines mit ihr oskulirenden Kreises abgeleitet. Ein Kreis heißt osculirend der drei gemeinschaftliche Puncte mit einer Curve hat. —

Es heissen x, y die Coordinaten der Curve und x', y' die des Kreises. Für die drei Punkte wird man haben

$$y' = y$$

$$\frac{dy'}{dx'} h + cte = \frac{dy}{dx} h + cte$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} h^2 + cte = \frac{d^2y}{dx^2} + cte$$

oder

$$y' = y$$

$$\frac{dy'}{dx'} + cte = \frac{dy}{dx} + cte$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} + cte = \frac{d^2y}{dx^2} + cte$$

vorausgesetzt dass man in den Ausdrücken

y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, ~~x' und x~~ aus den Gleichungen der Curve abgeleitet, x' in x verwandelt hat. — Wenn man jetzt auf die Gränzen übergeht, indem man $h=0$ voraussetzt die drei Durchschnitts-Punkte werden in einen und denselben zusammenlaufen der die Berührung bestimmt und für welchen die Bedingungsgleichungen sind:

$$y' = y, \quad \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Wenn jetzt $(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = \gamma^2$ die Gleichung des Kreises ist, und wenn man sie differenziirt, so wird man bekommen

$$(x'-\alpha)+(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}=0$$

$$1+\frac{dy'^2}{dx'^2}+(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}=0$$

wenn man jetzt x' anstatt x setzt, so sollen die Werthe der y, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ dieselben seyn die man aus der Gleichung der Curve erhält. Macht man diese Substitution so werden die letzten Gleichungen in folgende

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\gamma^2$$

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\frac{d^2y}{dx^2}+(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

übergehen. — Die zwei letzten geben die Werthe

$y-\beta$ und $x-\alpha$

Substituirt man diese Werthe in der ersten von den letzten drei Gleichungen, so wird man bekommen, wenn γ oder den Halbmesser des osculirenden Kreises oder den Krümmungs-Halbmesser.

$$d(x\pm y\pm z\pm\ldots)=dx\pm dy\pm dz\pm$$

$$d(xy)=x\,dy+y\,dx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}$$

$$d(x^m)=m\,x^{m-1}dx$$

$$d\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$d.\log x=\frac{dx}{x}$$

$$d(e^x)=e^x dx,\ \text{denn}\ \log e=1$$

$$d(x^z)=z\,x^{z-1}dx+x^z dz\log.z$$

$$d.\log.\sin x = dx\,\mathrm{ctg}\,x \;\ldots\; d.\log.\cos x = -dx\,\mathrm{tang}\,x$$

$$d.\log.\mathrm{tg}\,x = \frac{dx}{\sin x \cos x} \;\ldots\; d.\log.\mathrm{ctg}\,x = -\frac{dx}{\sin x \cos x}$$

$$d.\log.\sec x = dx\,\mathrm{tg}\,x \;\ldots\; d.\log.\mathrm{cosec}\,x = -dx\,\mathrm{cotg}.\,x$$

$$y = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x \quad \text{so wird}$$

$$d.y = \frac{d.e^{x\sqrt{-1}} - d.e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{x\sqrt{-1}}\cdot\sqrt{-1}\,dx - e^{-x\sqrt{-1}}\cdot -\sqrt{-1}\,dx}{2\sqrt{-1}} =$$

$$= \frac{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\,dx}{2} = \cos x\,dx$$

Cycloide

$AP = x$; arc. $NM = AN = AP + PN$ oder, weil ($PN = Mp = \sqrt{2ay - y^2}$
$PM = y$) wo a den Halbmesser des erzeugenden Kreises bedeutet, arc. MN = arc. Sin. vers. Np = arc. Cos. Op = arc. Sin Mp

$$\text{arc. } MN = a.\,\text{arc. Sin. vers.}\left(\frac{y}{a}\right) = a.\,\text{arc. Cos.}\left(\frac{a-y}{a}\right) = a.\,\text{arc. Sin.}\left(\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a}\right)$$

auch

$$x + \sqrt{2ay - y^2} = a.\,\text{arc. Sin. vers.}\left(\frac{y}{a}\right)$$

und daraus

$$x = a.\,\text{arc. Sin. vers.}\left(\frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

oder

$$x = a.\,\text{arc. Cos}\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

als die gesuchte Gleichung der Cykloide

Differenziirt man eine dieser Gleichungen z. B. die letzte, so erhält man

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2-(a-y)^2}} - \frac{(a-y)dy}{\sqrt{2ay-y^2}} \quad \text{oder}$$

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay-y^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

als Differentialgleichung der Cycloide.
Aus dieser Gleichung erhält man leicht

$$\text{Subtangente } PT = \frac{y^2}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

$$\text{Subnormale } PN = \sqrt{2ay-y^2}$$

$$\text{Tangente } MT = \frac{y\sqrt{2ay}}{\sqrt{2ay-y^2}}$$

$$\text{Normale } MN = \sqrt{2ay}$$

Differenzirt man noch mal die Gleichung der Cycloide u. setzt für $\frac{dy}{dx}$ den Werth so bekommt man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}$$

welcher Ausdruck zeigt dass die Cycloide ihre hohle Seite der Abscissen Axe zukehrt. Diese Werthe für beiden Differentialquotienten in die allgemeine Gleichung für Krümmungs-Halbmesser gesetzt ~~gibt~~ geben den Krümmungs Halbmesser der Cycloide

$$r = 2\sqrt{2ay}$$

woher man sieht dass der Krümmungs-Halbmesser der Cycloide in jedem Punckte dem entsprechenden doppelten Normale gleich ist.

Man findet auch ohne Mühe die Coordi-
naten des Mittelpunctes des Krümmungskrei-
ses für irgend einen Punct x, y der Cykloide

$$x-\alpha = -2\sqrt{2ay-y^2}$$
$$y-\beta = 2y$$

und daraus

$$\alpha = x+2\sqrt{2ay-y^2}$$
$$\beta = -y$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichun-
gen für x sein Werth aus der primitiven
Gleichung der Cycloide, und eliminirt
aus dieser und der zweiten y so erhält
man $\alpha = a.\,\mathrm{arc\,sinver.}\left(-\frac{\beta}{a}\right)+\sqrt{-2a\beta-\beta^2}$
als die Gleichung der <u>Evolute</u> welche
sofort zeigt dass die Evolute bei dem
angenommenen Coordinatensysteme nur
für <u>negativen</u> Ordinaten bestehet.
Diese letzte Gleichung verwandelt sich
in $\alpha = a.\,\mathrm{arc.\,sinvers.}\left(\frac{\beta}{a}\right)-\sqrt{2a\beta-\beta^2}$
indem man die Abscissen nicht von C' son-
dern von A' zählt, weswegen wird man statt
α, $A'C'-\alpha = a\pi-\alpha$ setzen und ferner
ist $\pi-\mathrm{arc.\,sinvers.}\left(\frac{2a-\beta}{a}\right) = \mathrm{arc.\,sinver.}\left(\frac{\beta}{a}\right)$
Die vorige Gleichung zeigt dass die Evolute
auch eine Cycloide ist.

Das Element des Bogens einer Cycloide $ds = \sqrt{2a}\,\frac{dy}{\sqrt{2a-y}}$
— der Fläche $dz = \frac{y^2dx}{\sqrt{2ay-y^2}}$

Sey $u = \log . \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

setzt man

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$
$$z = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

so wird

$$u = \log \frac{y}{z} = \log y - \log z$$

also $du = \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$

Es ist aber

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}} \left\{ \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \right\} =$$

$$= -\frac{z\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}$$

und eben so wird

$$dz = \frac{y\,dx}{2\sqrt{1-x^2}} \text{ seyn}$$

und daher $\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = -\frac{(y^2+z^2)\,dx}{2yz\sqrt{1-x^2}}$

aber $y^2 + z^2 = 4$ und $yz = 2x$

so ist endlich

$$du = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \frac{a+bz}{\alpha+\beta z} \; \ldots \; dy = \frac{b\alpha - a\beta}{(\alpha+\beta z)^2}\,dz$$

$$y = \frac{a-bz}{\alpha-\beta z} \; \ldots \; dy = \frac{-b\alpha + a\beta}{(\alpha-\beta z)^2}\,dz$$

$$y = \frac{a+bz}{\alpha-\beta z} \; \ldots \; dy = \frac{b\alpha + a\beta}{(\alpha-\beta z)^2}\,dz$$

$$y = \frac{a-bz}{\alpha+\beta z} \; \ldots \; dy = \frac{-b\alpha - a\beta}{(\alpha+\beta z)^2}\,dz$$

$$y = (\varphi x)^n \; \ldots \; dy = n(\varphi x)^{n-1}\,d\varphi x$$

$$y = (\varphi z)^n \; \ldots \; dy = n(\varphi z)^{n-1}\,d\varphi z\,dz$$

$$y = z^{\frac{1}{n}} \; \ldots \; dy = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}\,dz$$

$$y = \sqrt[n]{z} \; \ldots \; dy = \frac{1}{n}\,\frac{dz}{\sqrt[n]{z^{n-1}}}$$

$$y = z^{\frac{m}{n}} \; \ldots \; dy = \frac{m}{n} z^{\frac{m}{n}-1}\,dz$$

$$y = \sqrt[n]{z^m} \; \ldots \; dy = \frac{m}{n}\,\frac{dz}{\sqrt[n]{z^{n-m}}}$$

$$y = \sqrt{z} \; \ldots \; dy = \frac{1}{2}\,\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$y = \sqrt[3]{z} \; \ldots \; dy = \frac{1}{3}\,\frac{dz}{\sqrt[3]{z^2}}$$

$$y = \sqrt[4]{z} \; \ldots \; dy = \frac{1}{4}\,\frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$$

$$y = \sqrt{z^3} = z\sqrt{z} \; \ldots \; dy = \frac{3}{2}\sqrt{z}\,dz$$

$$y = \sqrt[3]{z^2} \; \ldots \; dy = \frac{2}{3}\,\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$$

$$y = \sqrt[4]{z^5} = z\sqrt[4]{z} \; \ldots \; dy = \frac{5}{4}\sqrt[4]{z}\,dz$$

$$y = \sqrt[5]{z^3} \; \ldots \; dy = \frac{3}{5}\,\frac{dz}{\sqrt[5]{z^2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{z}} \; \ldots \; dy = -\frac{1}{2}\,\frac{dz}{z\sqrt{z}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \; \ldots \; dy = -\frac{1}{3}\,\frac{dz}{z\sqrt[3]{z}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{z}} \; \ldots \; dy = -\frac{1}{4}\,\frac{dz}{z\sqrt[4]{z}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}} \; \ldots \; dy = -\frac{2}{3}\,\frac{dz}{z\sqrt[3]{z^2}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{z^5}} \; \ldots \; dy = -\frac{5}{3}\,\frac{dz}{z^2\sqrt[3]{z^2}}$$

$$y=(a+bz^n)^m \;\text{-----}\; dy=mnbz^{n-1}(a+bz^n)^{m-1}dz$$

$$y=(a+bz^n)^{-m}$$
$$=\frac{1}{(a+bz^n)^m} \;\text{-----}\; dy=-\frac{mnbz^{n-1}dz}{(a+bz^n)^{m+1}}$$

$$y=(a+bz^n)^{\frac{1}{m}} \;\text{-----}\; dy=\frac{n}{m}bz^{n-1}(a+bz^n)^{\frac{n}{m}-1}dz$$
$$=\sqrt[m]{a+bz^n} \;\text{-----}\; =\frac{n}{m}\frac{bz^{n-1}dz}{\sqrt[m]{(a+bz^n)^{m+1}}}$$

$$y=(a+bz^n)^{\frac{m}{q}} \;\text{-----}\; dy=\frac{mn}{q}bz^{n-1}(a+bz^n)^{\frac{m}{q}-1}dz$$
$$=\sqrt[q]{(a+bz^n)^m} \;\text{---}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt[q]{(a+bz^n)^m}} \;\text{-----}\; dy=-\frac{mn}{q}\frac{bz^{n-1}dz}{\sqrt[q]{(a+bz^n)^{m+q}}}$$
$$=(a+bz^n)^{-\frac{m}{q}} \;\text{---}$$

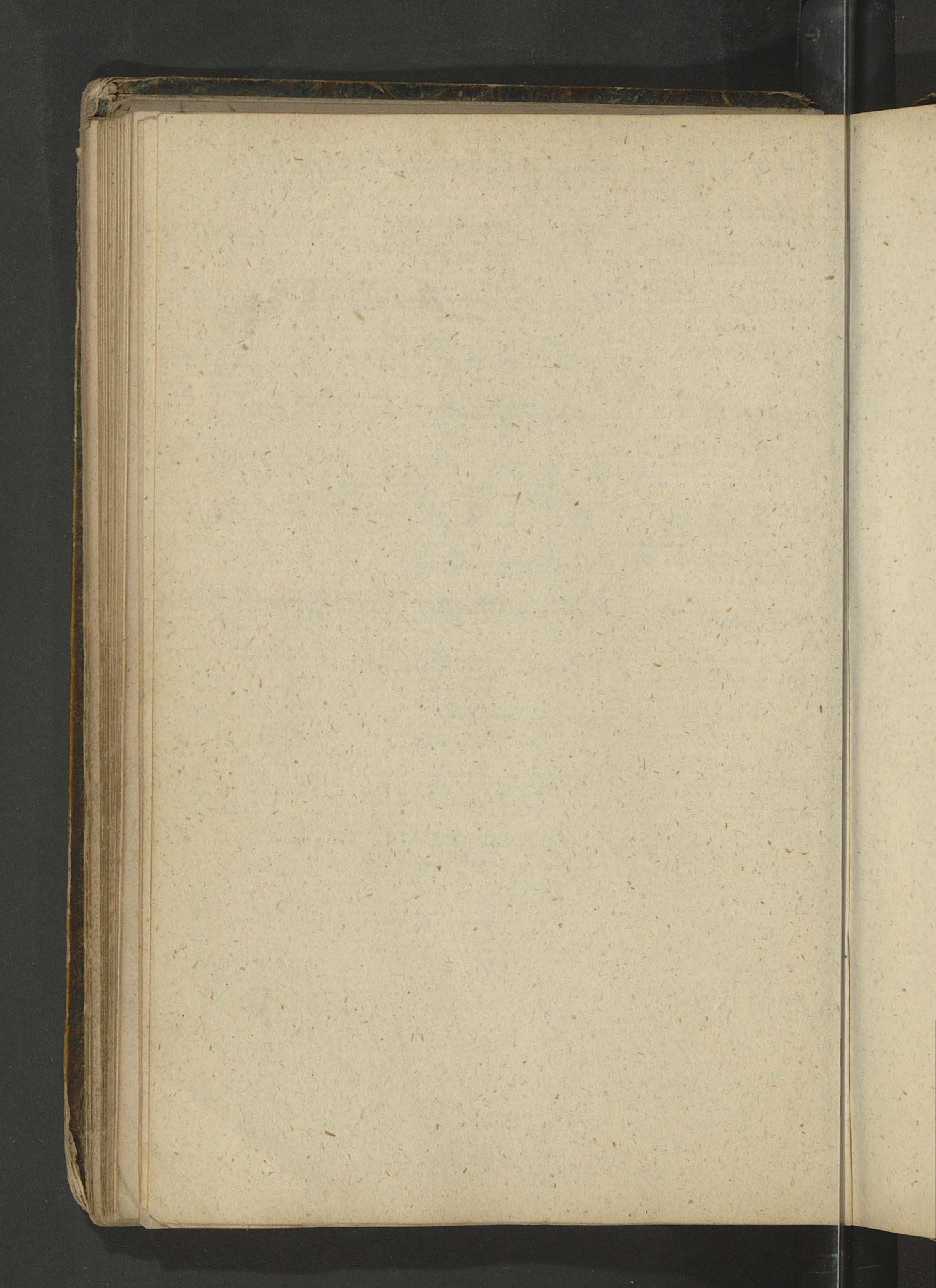
$$y=z^p(a+bz^n)^m \;\text{-----}\; dy=z^{p-1}(a+bz^n)^{m-1}\{p(a+bz^n)+mnbz^n\}dz$$

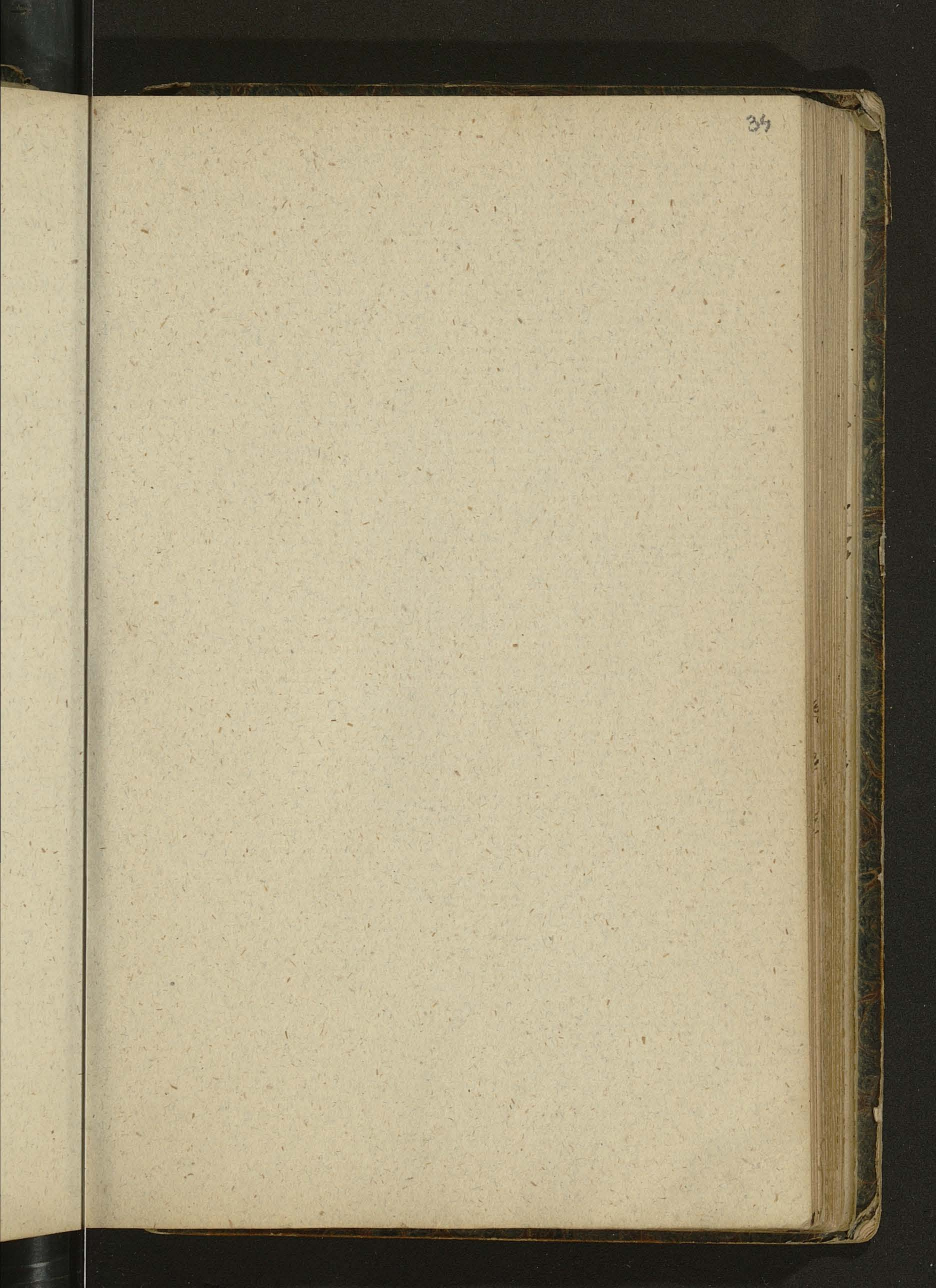
$$y=\sqrt{a+bz^2} \;\text{-----}\; dy=\frac{a+2bz^2}{\sqrt{a+bz^2}}dz$$

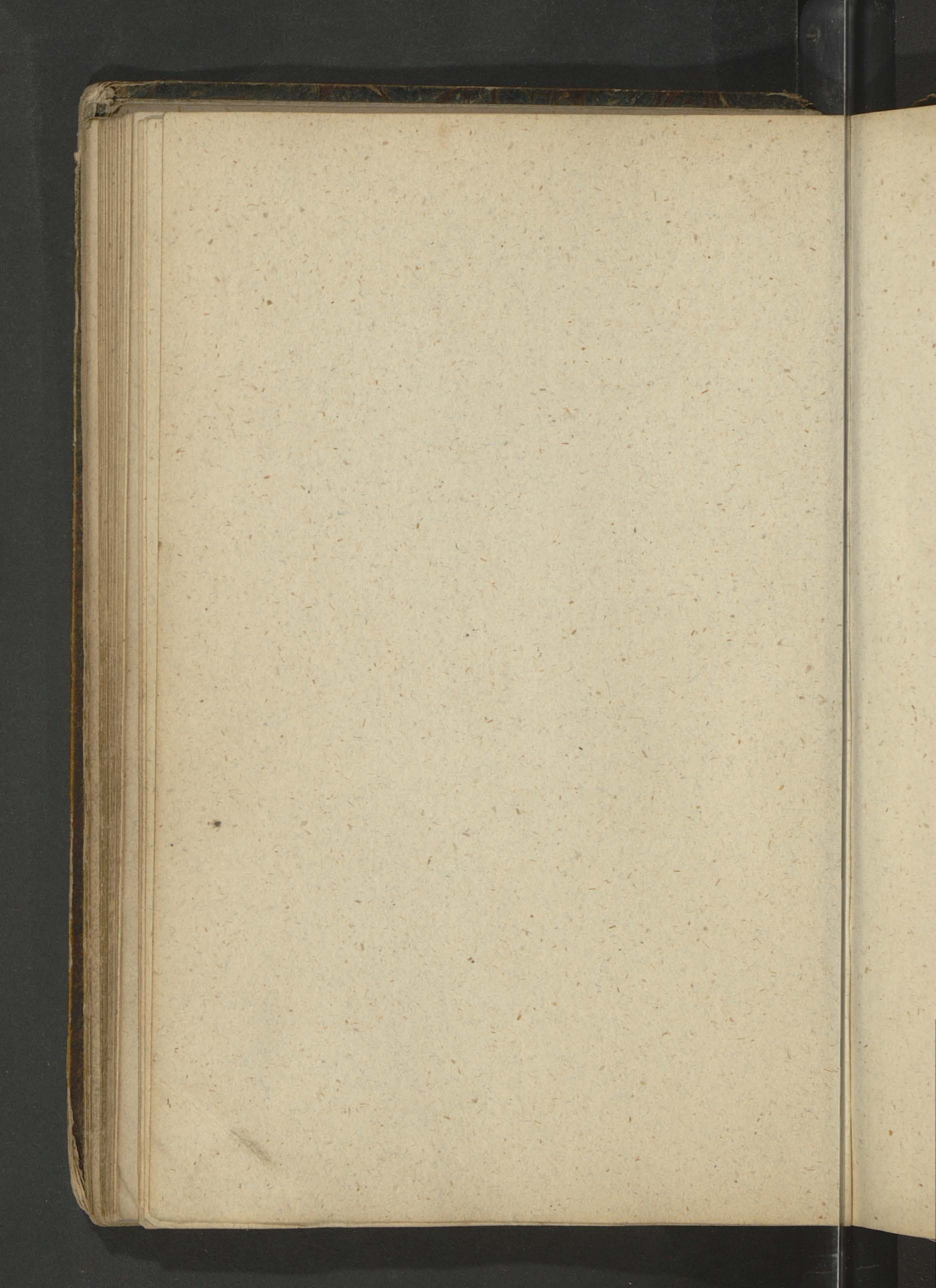
$$y=\frac{\sqrt{a+bz^2}}{z} \;\text{-----}\; dy=\frac{-a\,dz}{z^2\sqrt{a+bz^2}}$$

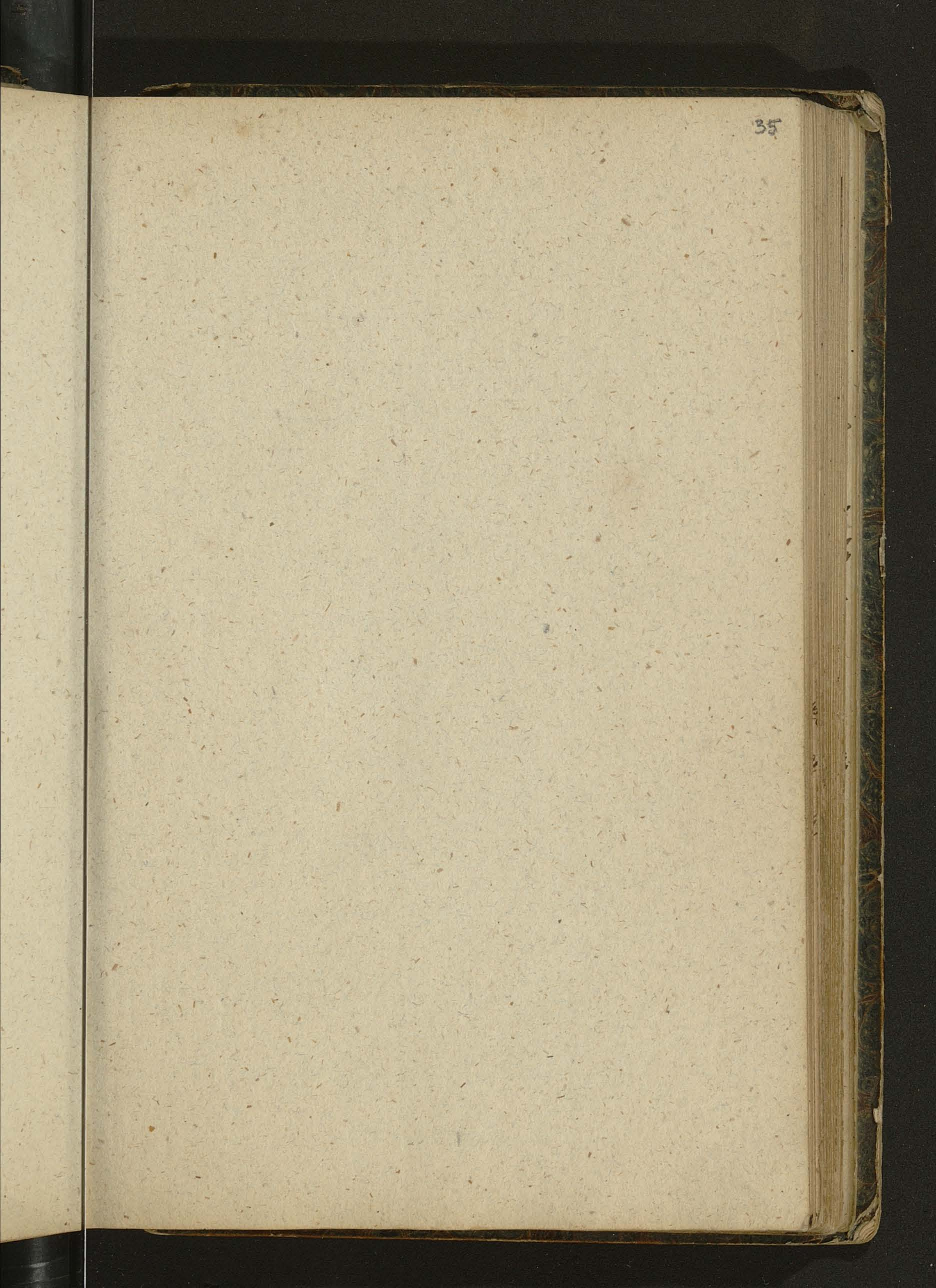
$$y=\frac{z}{\sqrt{a+bz^2}} \;\text{-----}\; dy=\frac{a\,dz}{\sqrt{(a+bz^2)^3}}$$

$$y=\frac{1}{z\sqrt{a+bz^2}} \;\text{-----}\; dy=-\frac{a+2bz^2}{z^2(a+bz^2)^{\frac{3}{2}}}dz$$









Integralrechnung

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log. \frac{x-a}{x+a} \quad \left(\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \text{Arc tang} \frac{x}{a} \right.$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tang}\, x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc Sin}\, x + \text{Const.} = \frac{1}{2} \text{Arc. Sin}\, x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log. (x + \sqrt{1+x^2}) + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\log. \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right) + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\log. \left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right) + \text{const.}$$

$$\int dx \sqrt{a+bx^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{a+bx^2} + \frac{1}{2} a \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \log. \frac{-\sqrt{a}+\sqrt{a+bx^2}}{x}$$

$$\int \frac{a\,dx}{b-cx^2} = \int \frac{\frac{a}{b}dx}{1-\frac{c}{b}x^2} = \frac{a}{\sqrt{cb}} \int \frac{\frac{dx\sqrt{c}}{\sqrt{b}}}{1-\frac{c}{b}x^2} = \frac{a}{2\sqrt{cb}} \log. \frac{b+cx}{b-cx}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx+x^2}} = \log (b+x+\sqrt{a+2bx+x^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+2bx-x^2}} = \text{Arc Sin} \frac{x-b}{\sqrt{b^2+a}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{-a+2bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{Arc Sin} \frac{b-a}{x\sqrt{ca+b^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \log. \frac{a+bx+\sqrt{a(a+2bx+cx^2)}}{x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log. \frac{a+bx-\sqrt{a(a+2bx+cx^2)}}{x}$$

$$\int dx \cos x = \sin x + \text{const.}$$

$$\int dx \sin x = -\cos x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tang x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cotang x + \text{const.}$$

$$\int dx \sin x \cos x = \tfrac{1}{2} \sin x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log.\tang \tfrac{1}{2} x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log.\tang (45^\circ + \tfrac{1}{2} x) + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx \cos x}{\sin x} = \int \frac{dx}{\tang x} = \log.\sin x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx \sin x}{\cos x} = \int dx \tang x = -\log \cos x + \text{const.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \log.\tang x$$

Reductions-Formeln

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)^p} = -\frac{x^{m-n}}{(p-1)nb(a+bx^n)^{p-1}} + \frac{m-n}{nb(p-1)} \int \frac{x^{m-n-1}dx}{(a+bx^n)^{p-1}}$$

$$\int \frac{dx(a+bx^n)^p}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^p}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{nbp}{m-1} \int \frac{dx(a+bx^n)^{p-1}}{x^{m-n}}$$

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m)b} - \frac{(m-n)a}{(np+m)b} \int x^{m-n-1}dx(a+bx^n)^p$$

$$\int x^{m-1}dx(a+bx^n)^p = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{m+pn} + \frac{anp}{m+pn} \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{p-1}$$

$$\int \frac{dx(a+bx^n)^p}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{(m-n-1-np)b}{(m-1)a} \int \frac{dx(a+bx^n)^p}{x^{m-n}}$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^m}{(p-1)an(a+bx^n)^{p-1}} - \frac{m+n-np}{(p-1)an} \int \frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)^{p-1}}$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m-n}}{(m-np)b(a+bx^n)^p} - \frac{(m-n)a}{(m-np)b} \int \frac{x^{m-n-1}dx}{(a+bx^n)^p}$$

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int dx \sin^{m-2} x \cos^n x$$

$$\int dx \sin^m x \cos^n x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dx \sin^m x \cos^{n-2} x$$

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m-1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{dx \sin^{m-2} x}{\cos^{n-2} x}$$

$$\int \frac{dx \cos^n x}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{dx \cos^{n-1} x}{\sin^{m-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-1} x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}$$

$$\int \frac{dx \sin^m x}{\cos x} = -\frac{1}{m-1} \sin^{m-1} x + \int \frac{dx \sin^{m-2} x}{\cos x}$$

$$\int \frac{dx \cos^n x}{\sin x} = \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x + \int \frac{dx \cos^{n-2} x}{\sin x}$$

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \mathrm{Arc}\cos \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \log. \frac{\sqrt{a+b} + \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}x . \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}x . \sqrt{b-a}}$$

$$\int dx \, \text{Arc.Sin}\, x = x \, \text{Arc Sin}\, x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int x^m dx \, \text{Arc Sin}\, x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{Arc.Sin}\, x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

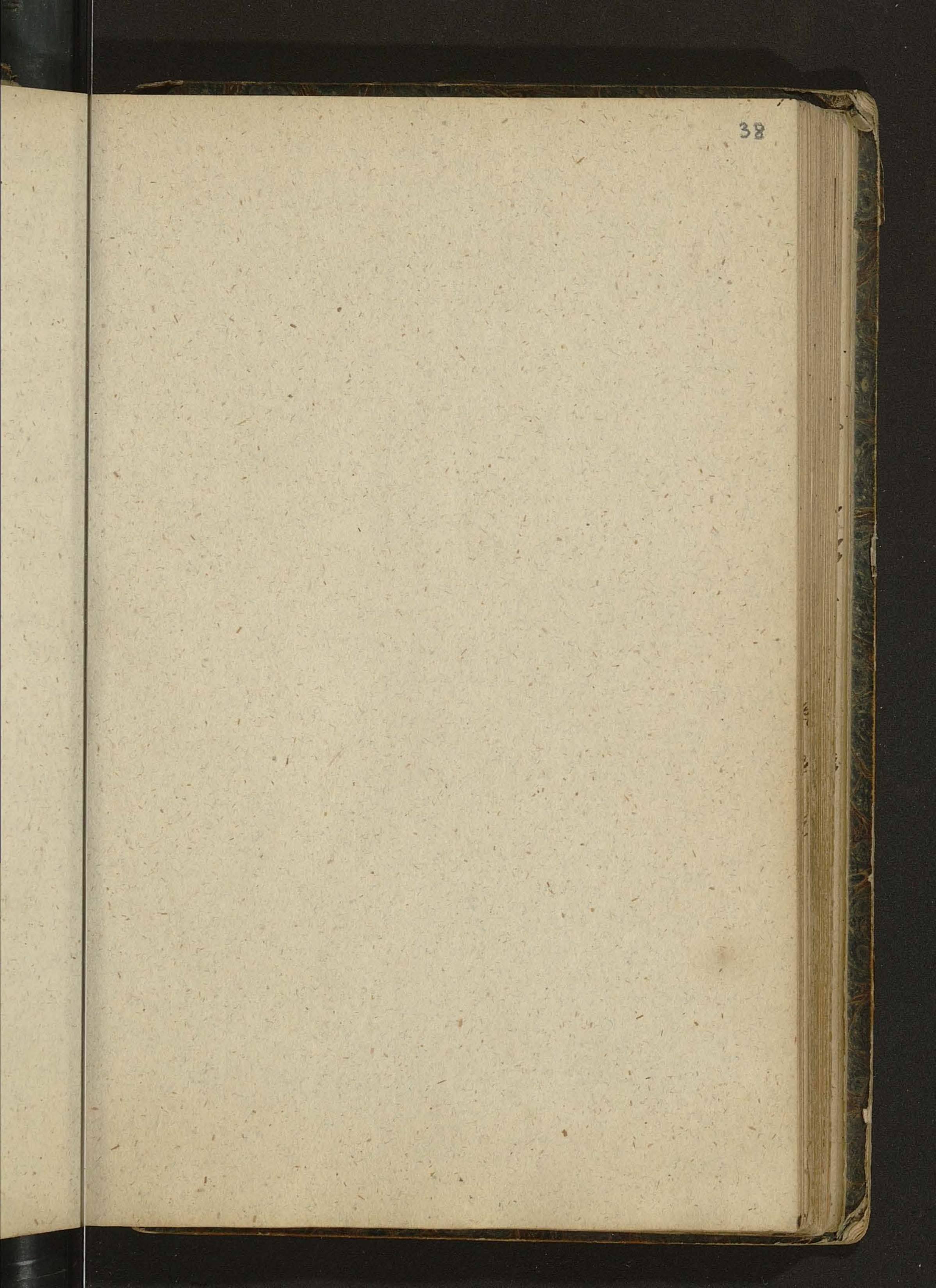
$$\int x^m dx \, \text{Arc Cos}\, x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{Arc Cos}\, x + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

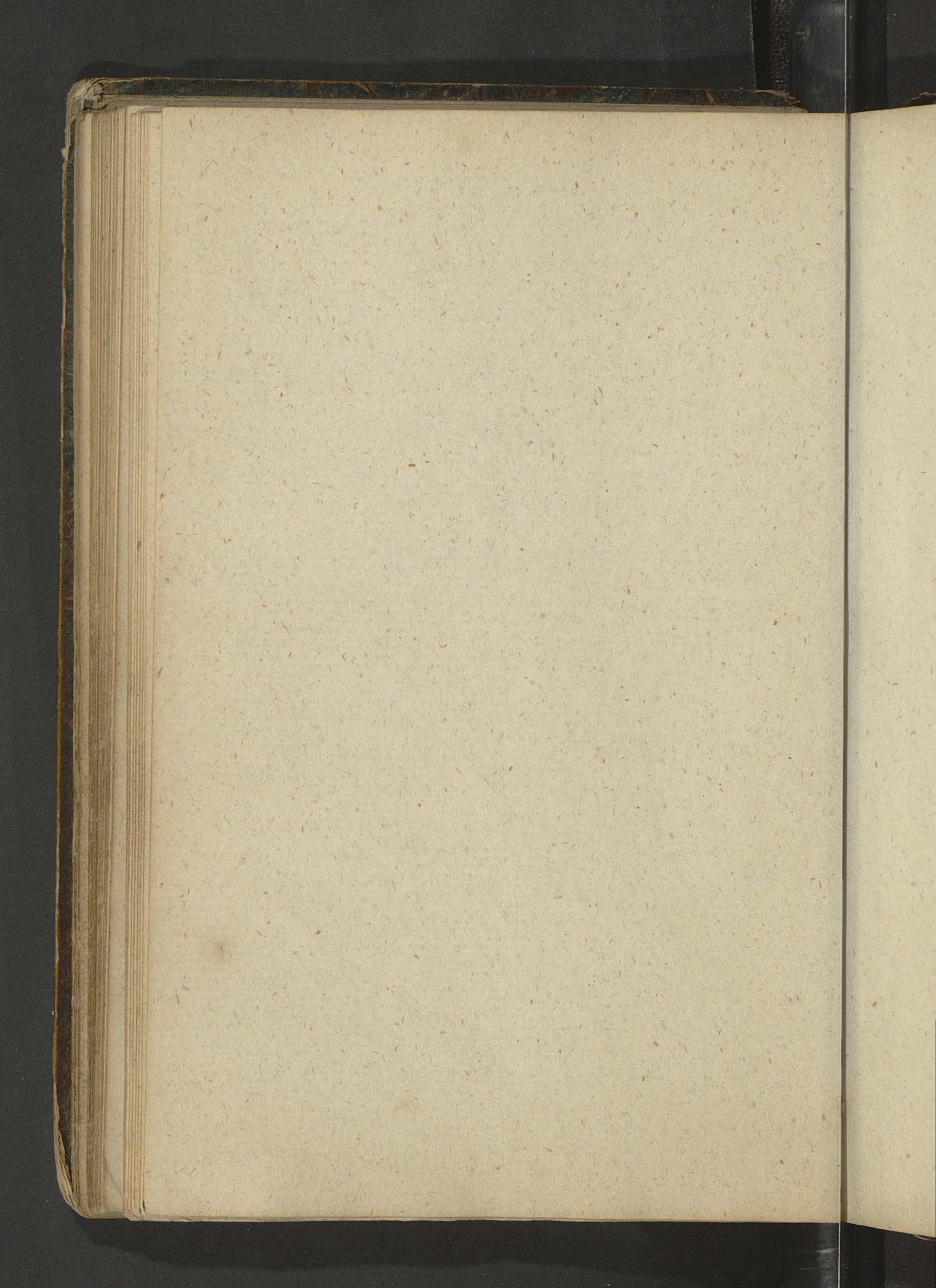
$$\int x^m dx \, \text{Arc Tg}\, x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{Arc Tg}\, x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2}$$

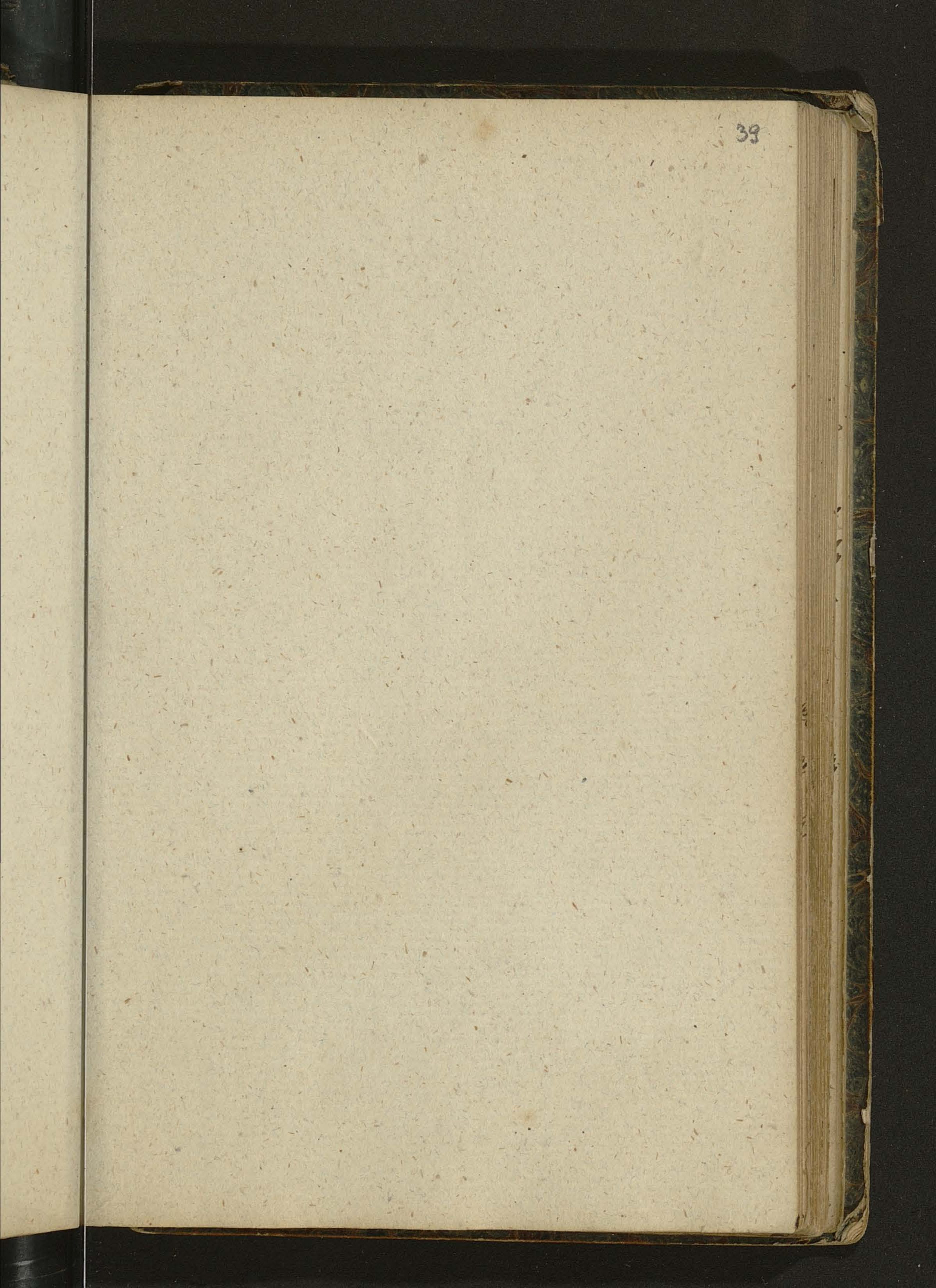
$$\int x^m dx \, \text{Arc. Ctg}\, x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{Arc. Ctg}\, x + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2}$$

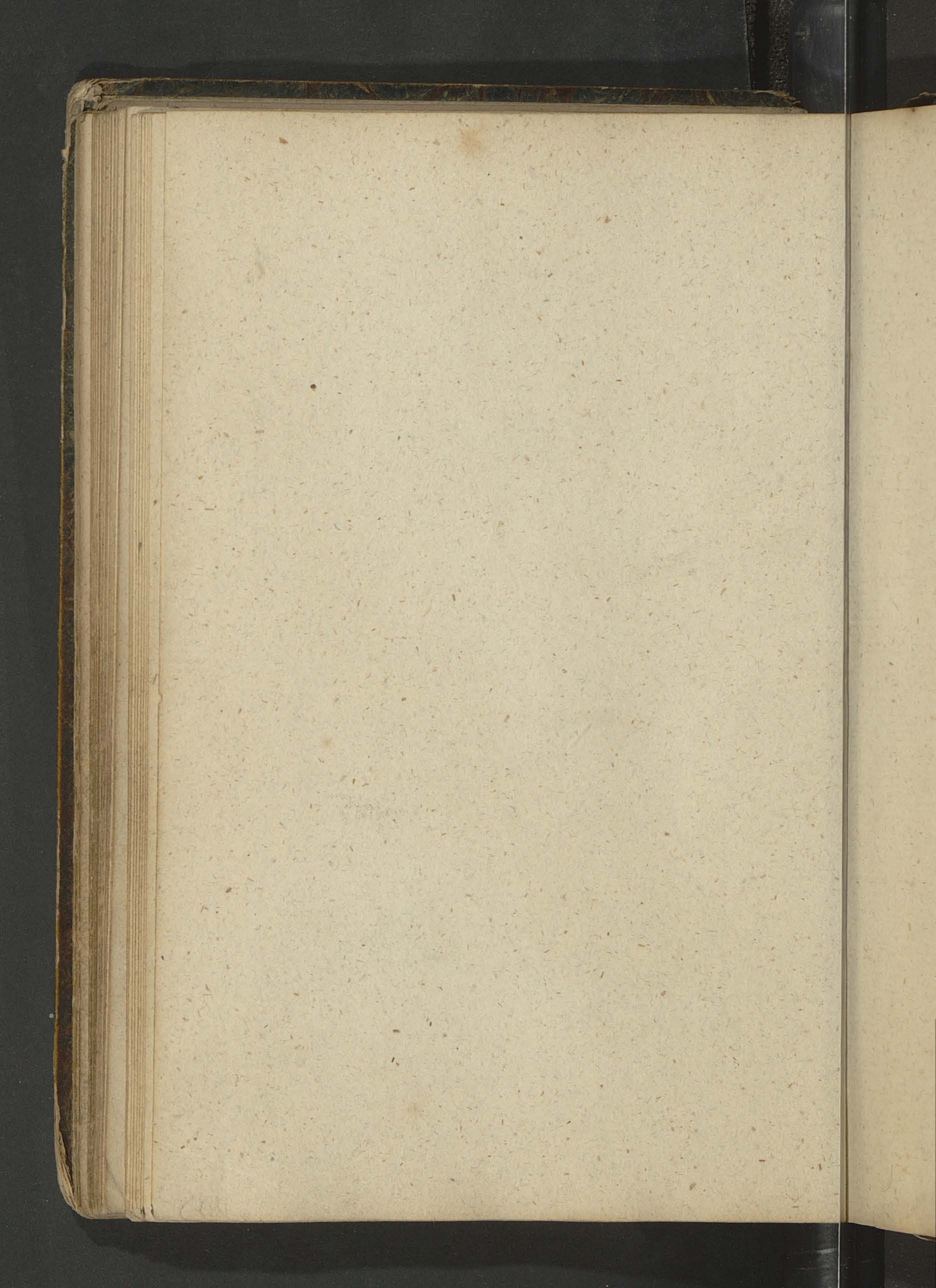
$$\int x^m dx \, \text{Arc Sec}\, x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{Arc Sec}\, x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m} dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

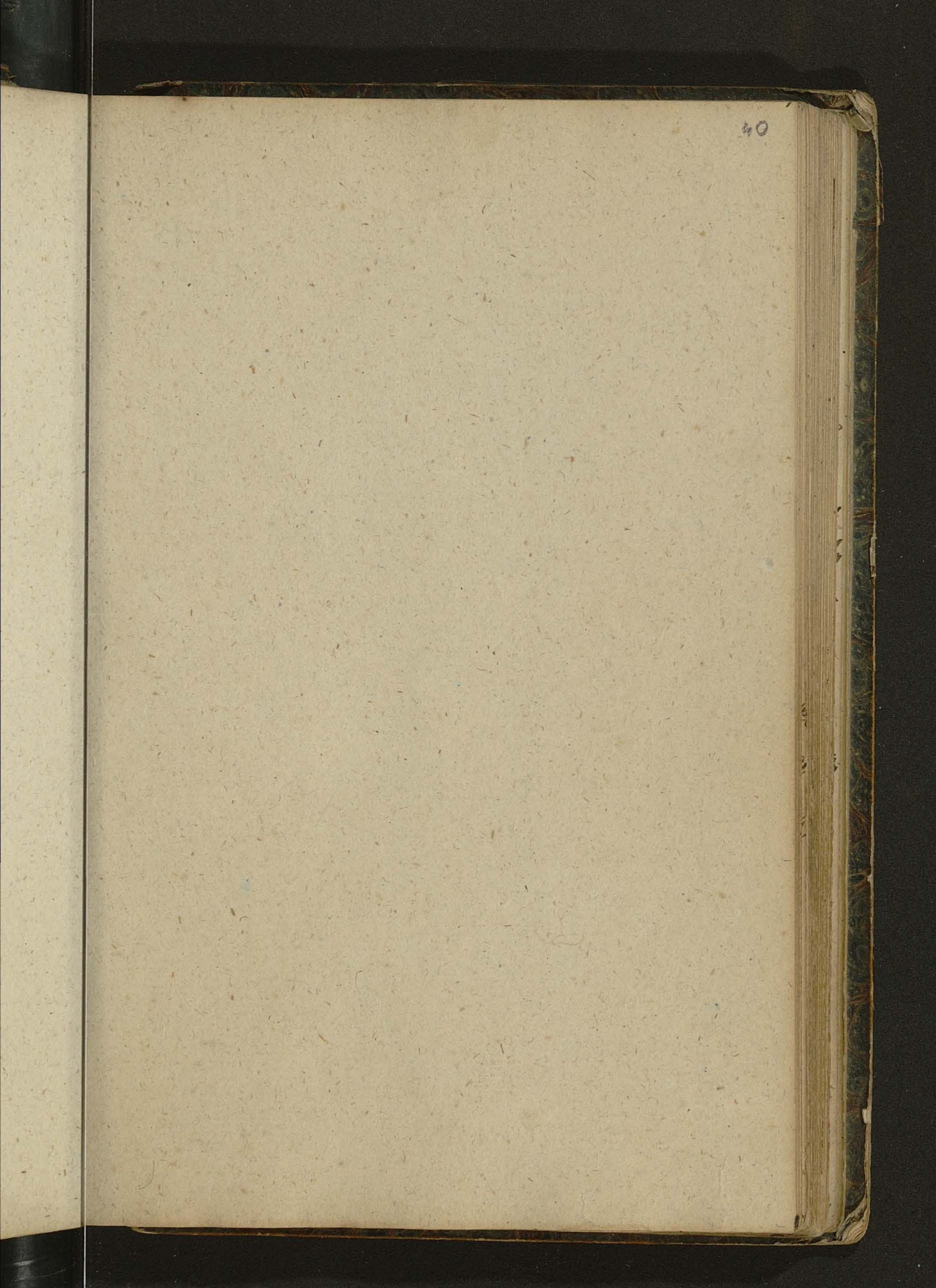
$$\int x^m dx \, \text{Arc Cosec}\, x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \text{Arc Cosec}\, x + \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m} dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

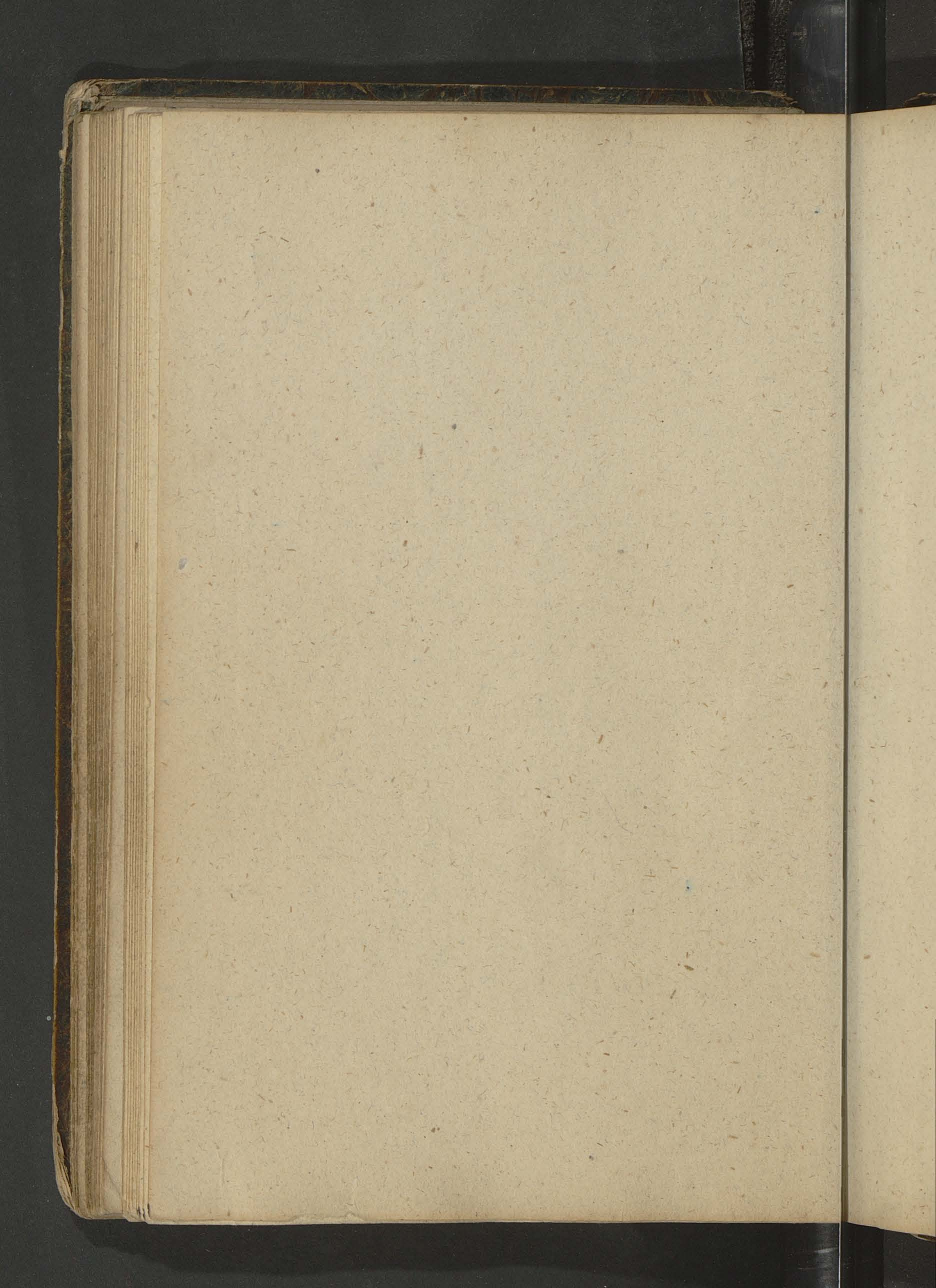


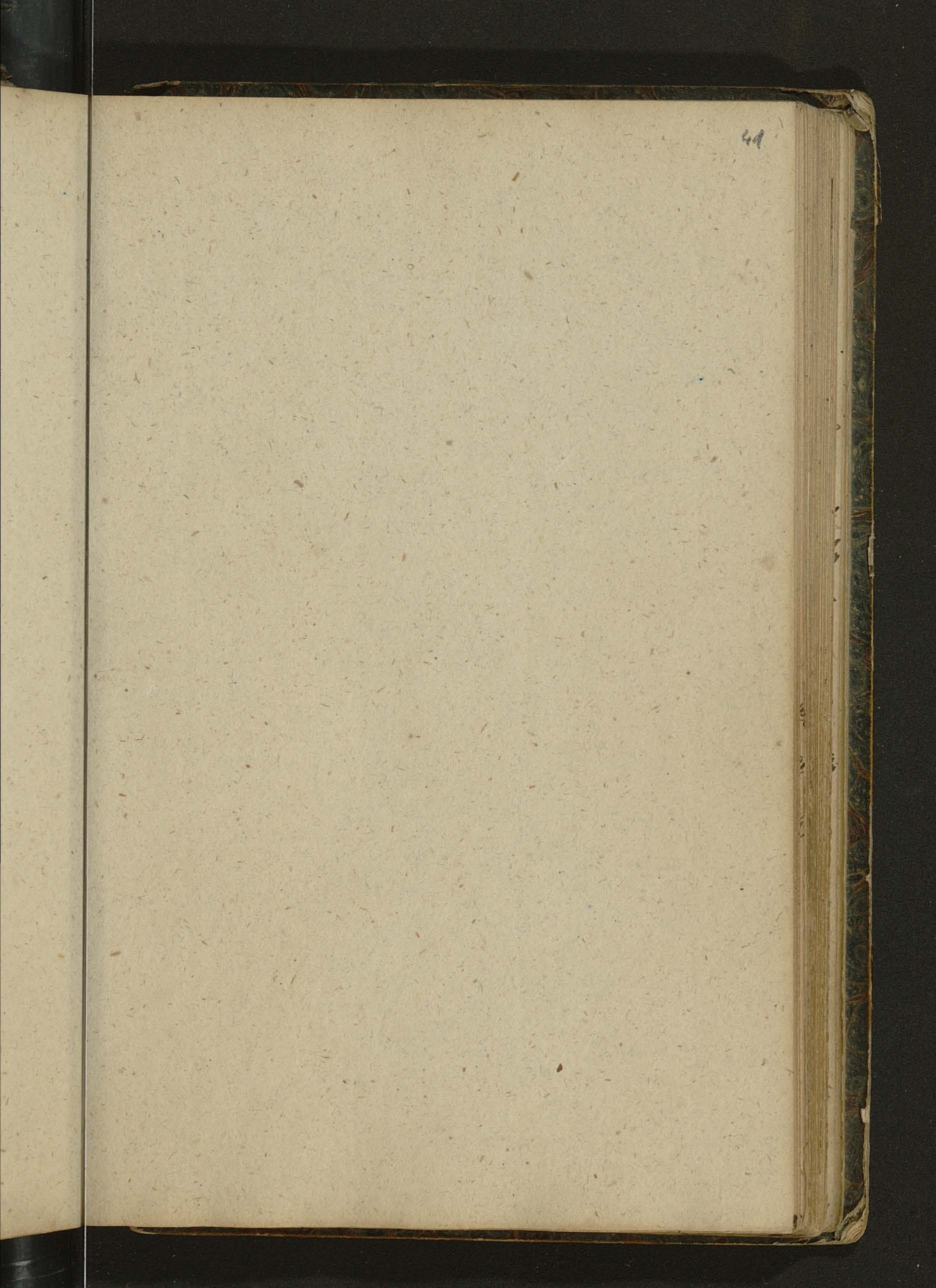


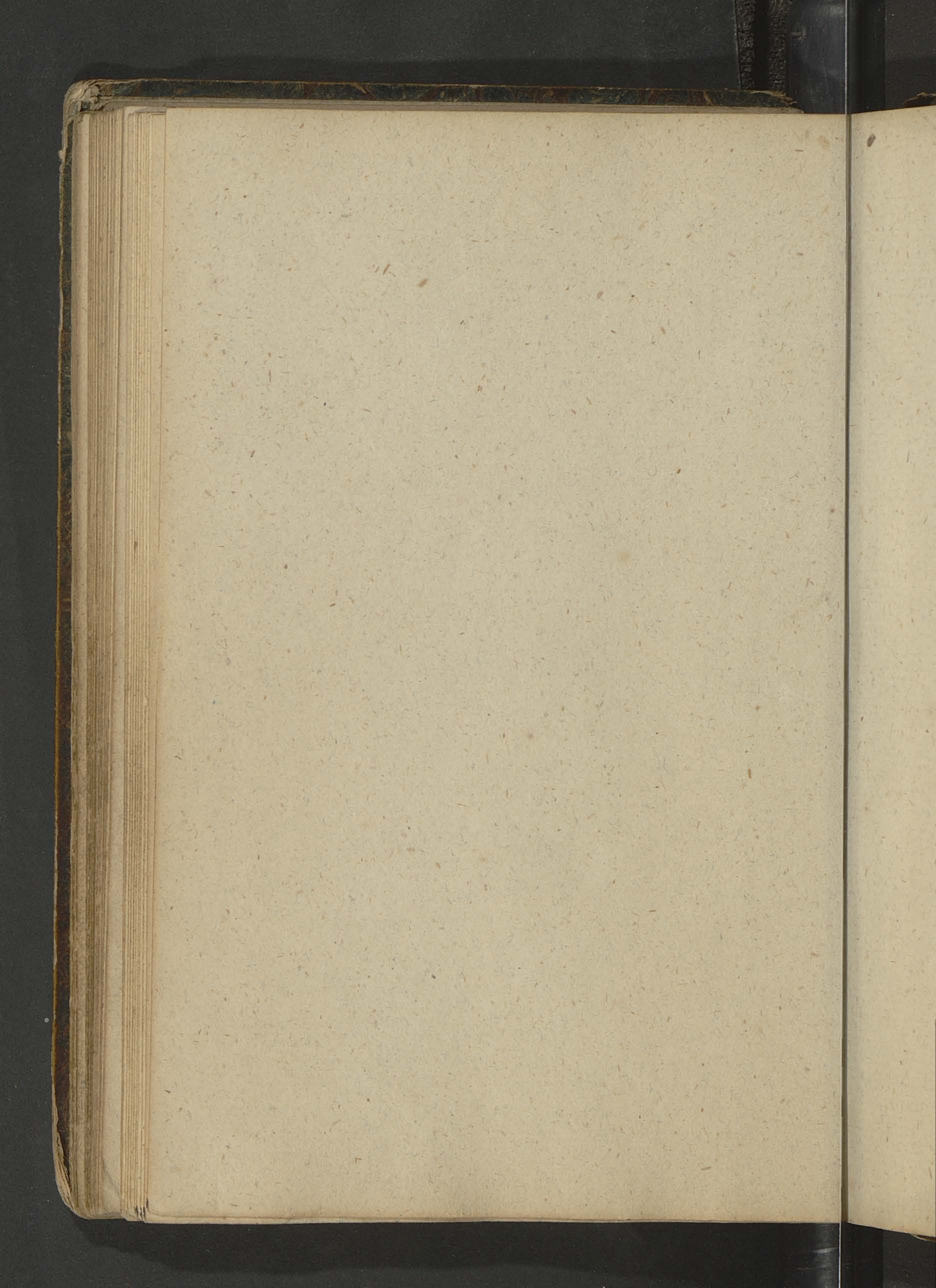


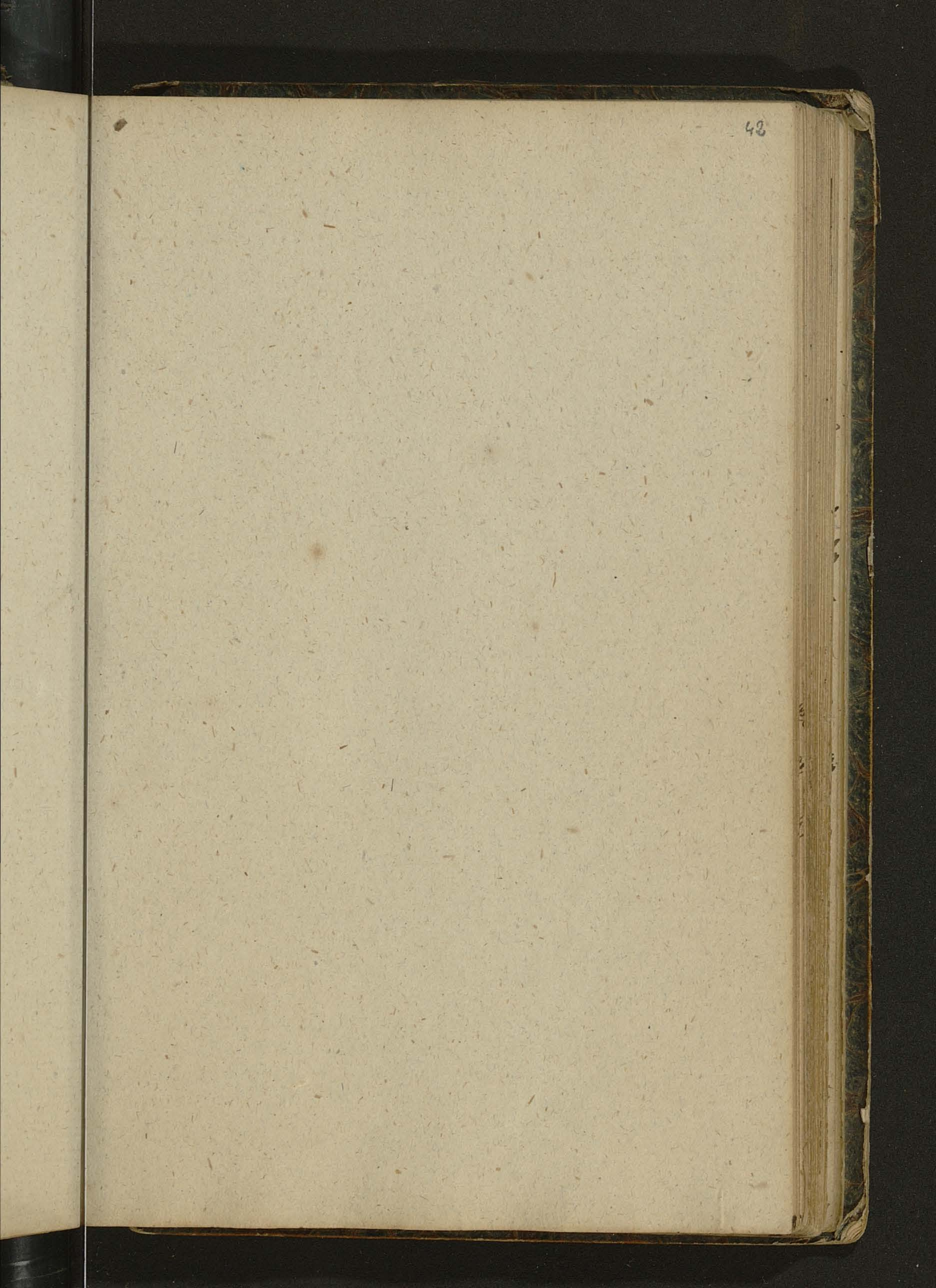


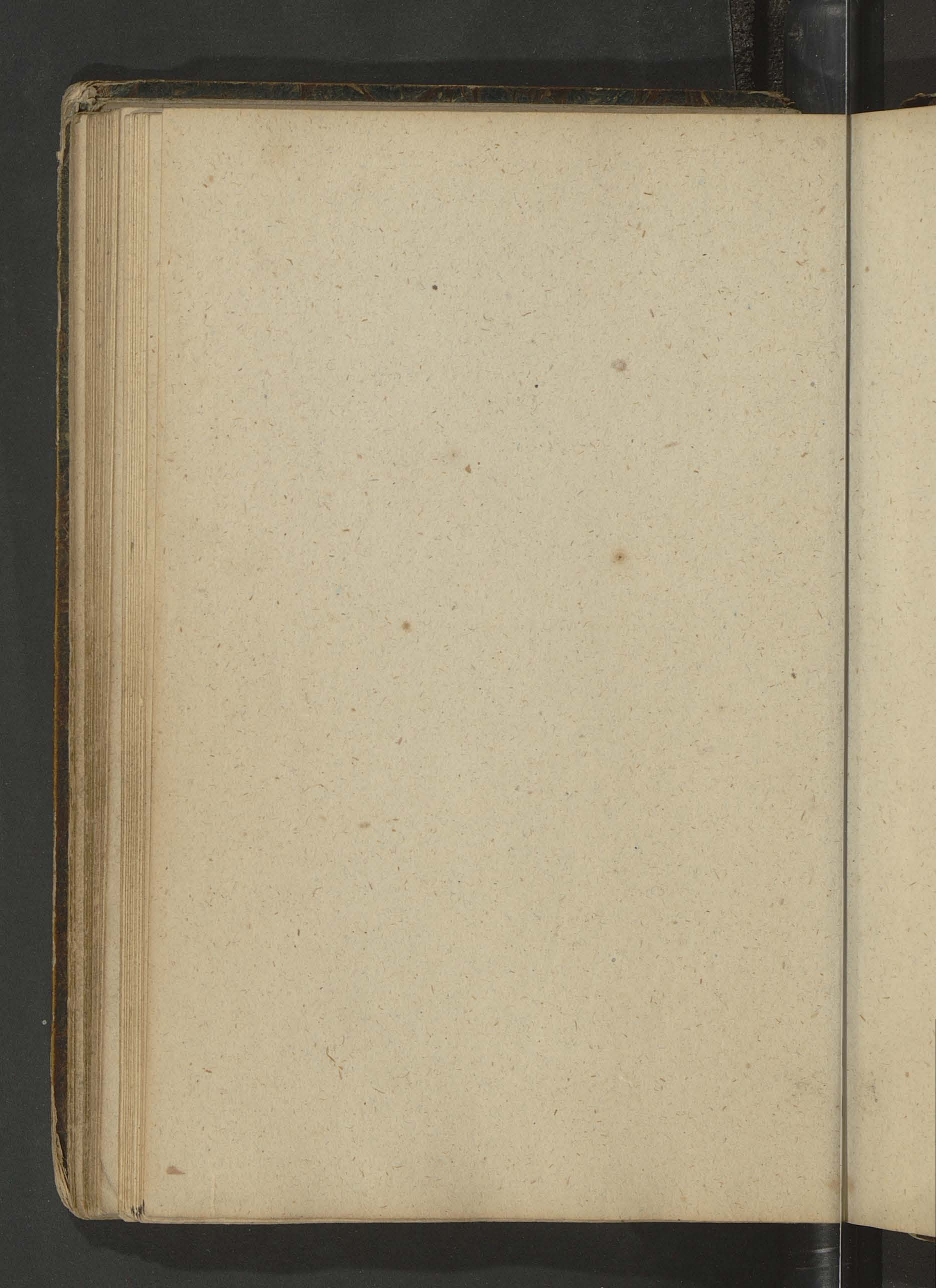


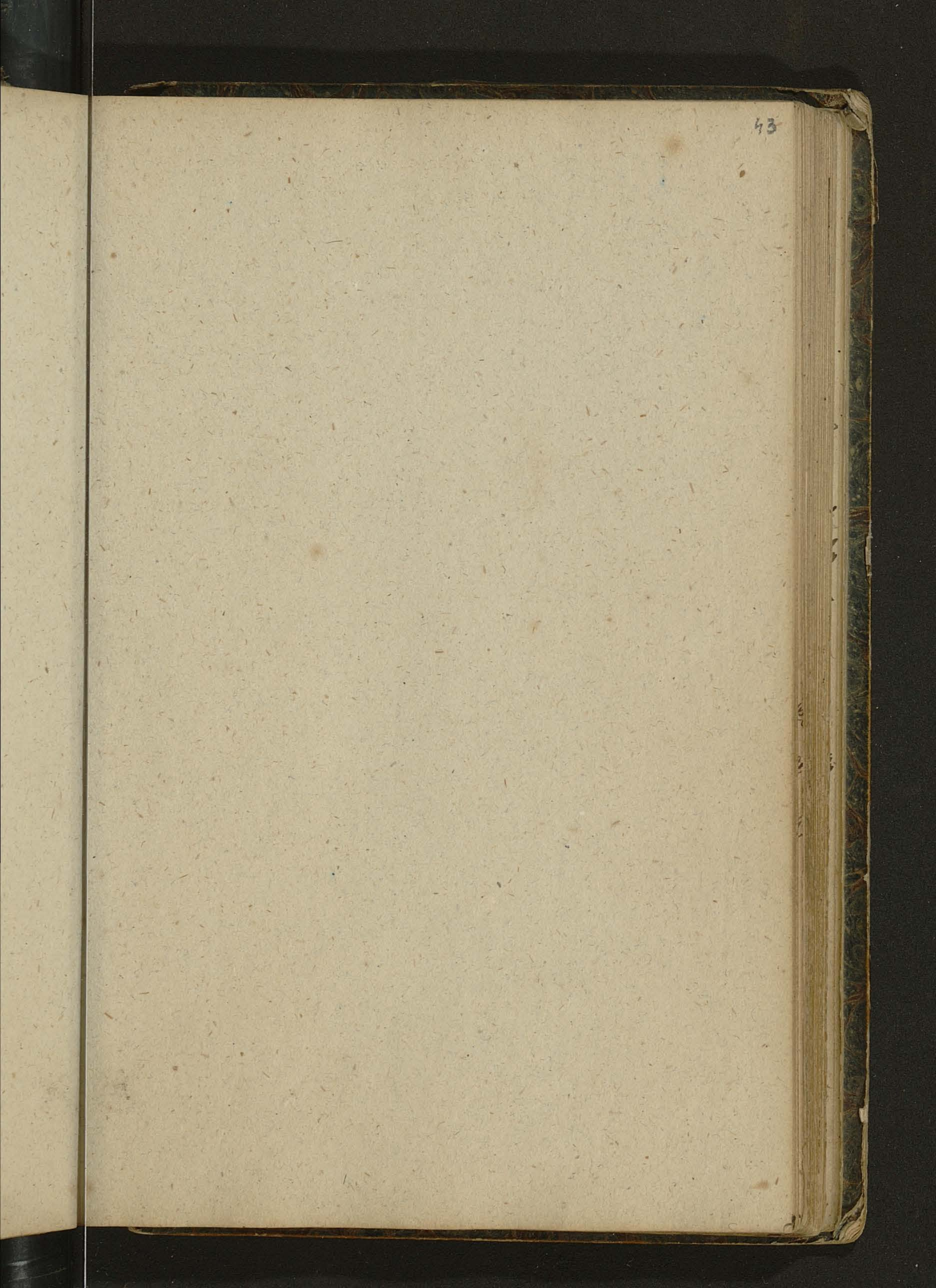


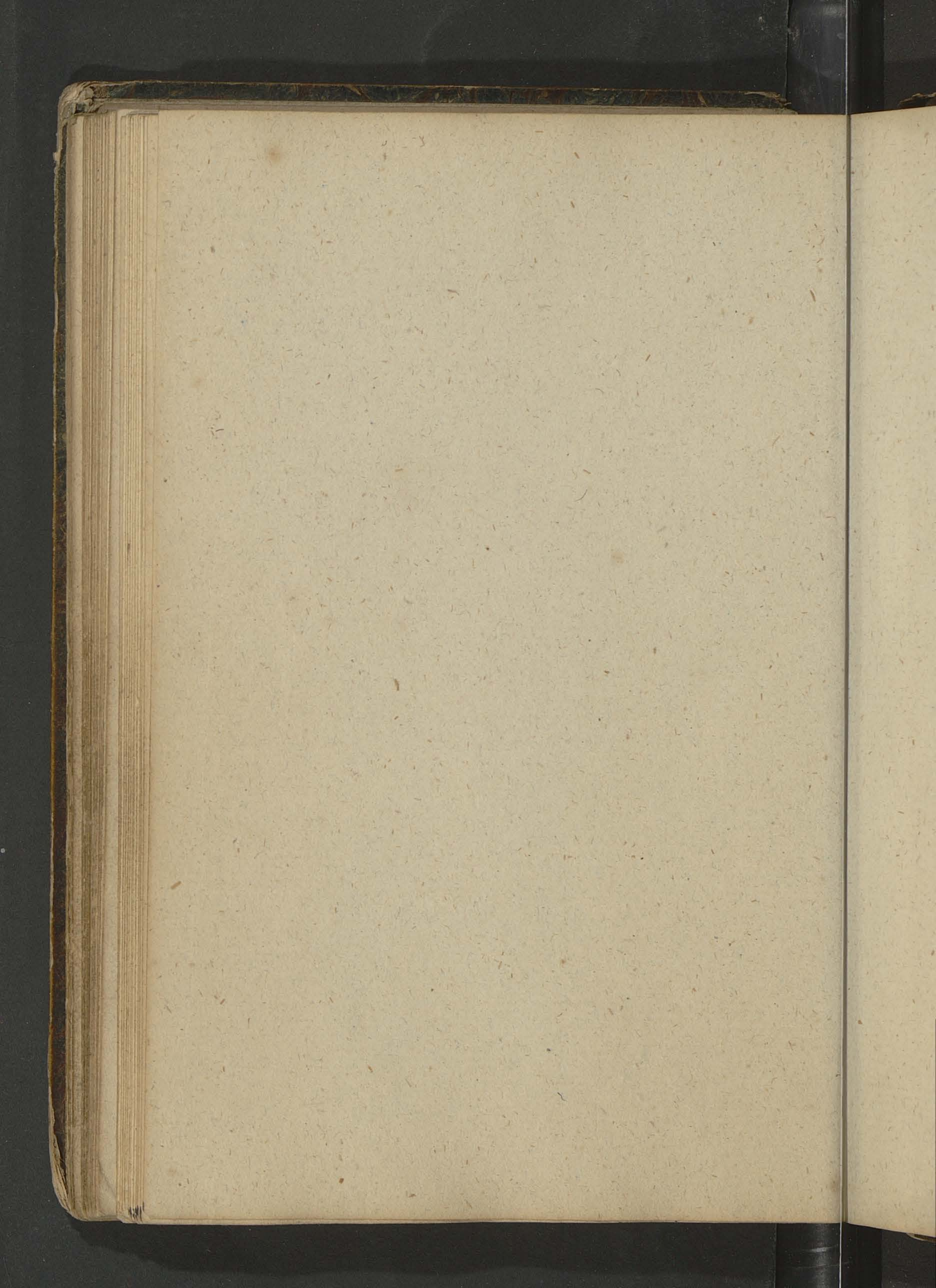


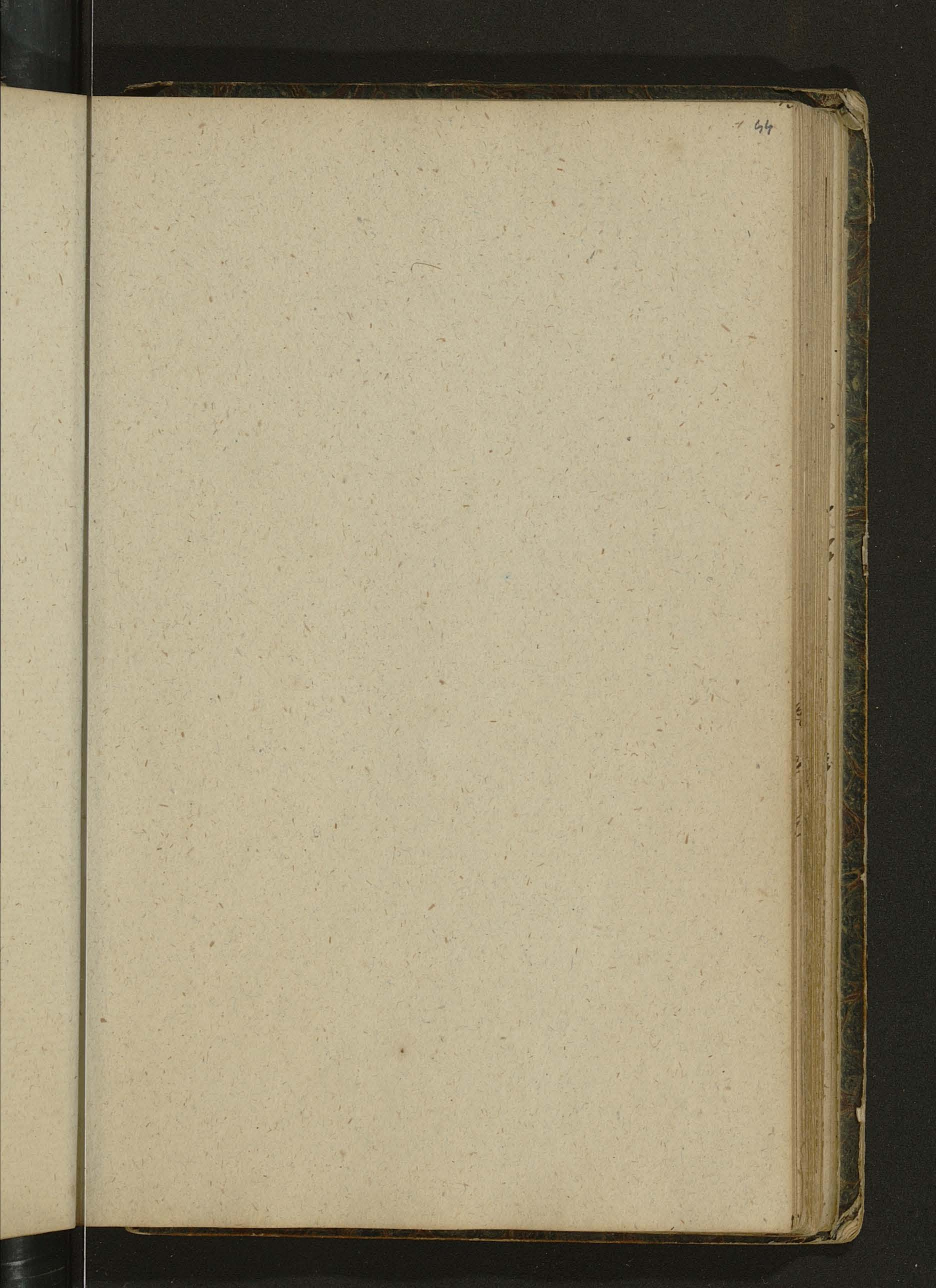


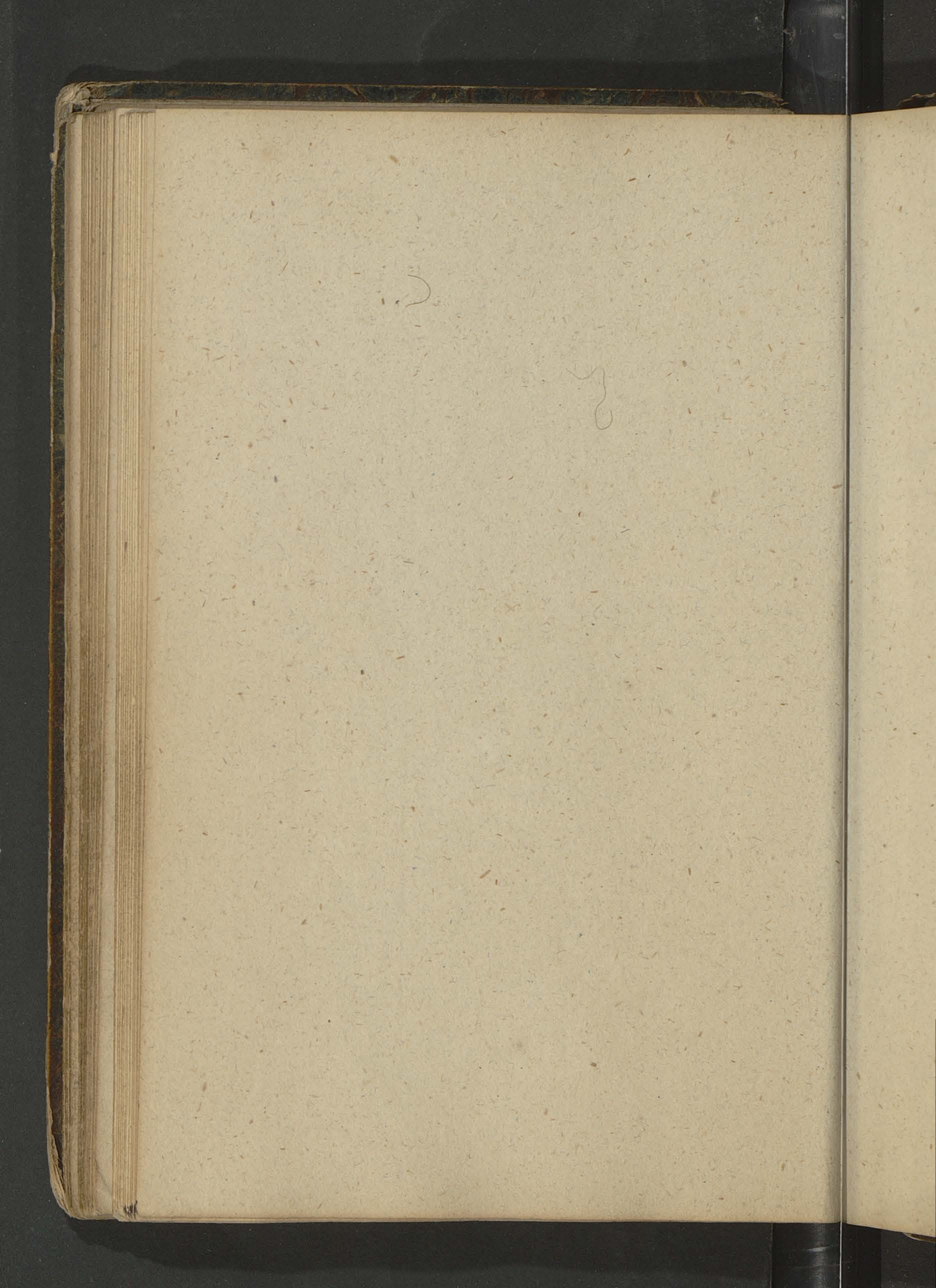


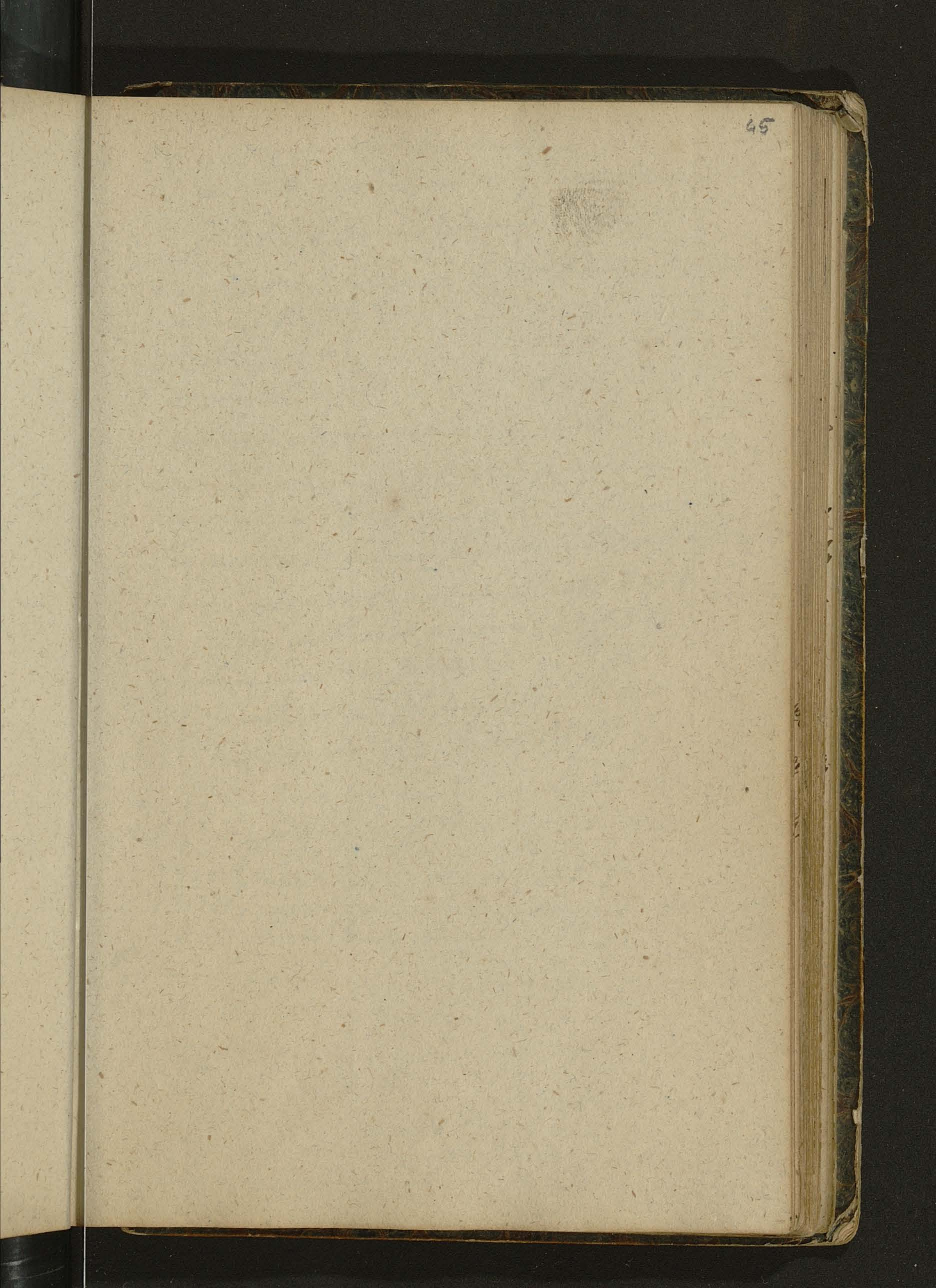












Według najnowszych rachunków ogólny stosunek jest na całej kuli ziemskiej mieszkańców

1228 milijonów dusz

Kaukaskiej rasy — — —	360 milijonów
mongolskiej — — —	552 —
murzyńskiej — — —	190 —
malajskiej — — —	170 —
indoamerykańskiej — — —	1 —

Te ludy mówią 3642 językami wyznają 1000 religij.

Roczna śmiertelność wynosi 33⅓ milijonów zatem dzienna śmiertelność 91554

w jednej minucie umiera 3780

a zatem w jednej sekundzie 62

(: Wochenschrift von Dr. Heis in Munster No 3. Jahr 1870 :)

Nitrogliceryna jest mieszanina

380 gramm. Gliceryny w 31° C.

1030 kwasu azotanego dymiącego w 50°

2000 kwasu siarczanego

Gliceryna powinna być oczyszczoną z obcych ciał równie też i oba kwasy

Dynamit czyli Dynamite jest mieszanina Nitrogliceryny z krzemionką delikatnie sproszkowaną. Zamiast krzemionki użyć można każdego ciała obojętnego szczególniej też wypalonej gliny z pieców do wypalania cegły lub z huty szklannej.

F Also die Zahl π wurde berechnet von

Archimedes — — — — — — — — auf	2 Ziff. genau
Astronomen Indiens — — — — — —	3
F. Rheticus — — — — — — — — —	8
Peter Metius — — — — — — — — —	8
Viete — — — — — — — — — — —	11
Adrianus Romanus belgischer Mathematiker	16
Ludolf van Ceulen aus Köln — — — —	35
A. Sharp — — — — — — — — — —	73
Machin — — — — — — — — — — —	100
Lagny — — — — — — — — — — —	127
Vega — — — — — — — — — — —	140
Manuscript der Bibliothek Radcliffe in Oxford — — —	156
Dahse — — — — — — — — — — —	200
Clausen — — — — — — — — — —	256
Richter — — — — — — — — — —	333
Rutherford — — — — — — — — —	440
Shanks — — — — — — — — — —	530

(: Cosmos t. VIII p. 335; 23 März 1855 :)

Professor Richter in Elbing hat π auf 333 verbürgte Decimalen berechnet und gefunden

π = 3·14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288
41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148
08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172
53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975
66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120
19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482
13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315
58817 48815 20920 ~~098~~ . . . . . .
9628 ~~[illegible]~~ 92540 91715

36436 78925 90360 01133 05305 48820
46652 13841 46951 94151 16094

Diese Ergänzungsziffer hat Director Strehlke in Danzig berechnet.

Rutherfort hat π in 440 Ziffern berechnet und die ersten 330 mit denen von Richter einstimmig gefunden, statt aber der drei letzten 098, hat er 962…
Shanks von Rutherfort ermuntert, hat π bis auf 530 Ziffern berechnet. Die oben nach 330 folgenden und von Strehlke angegebenen, sind die nemlichen welche Shanks gefunden hat deswegen folgen hier die letzten so wie sie in „Nouvelles Annales de Mathematiques T XIV p. 210. vorkommen

33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932
61179 31051 18548 07446 23799 62749 56735
18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336
73362 44065 66430 86021 39488

Die ersten 330 Ziffer sind von drei Rechner, Richter, Rutherfort und Shanks verificirt, die 440 von den beiden letzten F

Mit Hilfe des Newton'schen Binoms kann man jede beliebige Wurzel ausziehen, aber wenn man schon einen ziemlich nahen Werth von einer Wurzel kennt, so führt die Lambert'sche Formel eher zum Ziel wie der Binom. Diese Formel heißt so: Es sey α der genäherte Werth der Wurzel $\sqrt[m]{a}$, so ist $a=(\alpha+x)^m$ wo x eine sehr kleine Größe bedeutet. Aber

$$(\alpha+x)^m=\alpha^m+m\alpha^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\alpha^{m-2}x^2+\ldots$$

vernachlässigt man die zweite und höheren Potenzen von x als ungemein klein, so wird

$$a=\alpha^m+m\alpha^{m-1}x \quad \text{also} \quad x=\frac{a-\alpha^m}{m\alpha^{m-1}}$$

Je näher wird der Werth von α der wahren Wurzel, desto kleiner wird der Fehler oder x.

Hätte man die zweite Potenz nicht vernachlässigt so wäre

$$a=\alpha^m+m\alpha^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\alpha^{m-2}x^2$$

und
$$x=\frac{a-\alpha^m}{m\alpha^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\alpha^{m-2}x}$$

Setzen wir den vorigen genäherten Werth für x in diese letzte Gleichung, so bekommt man

$$x=\frac{2\alpha(a-\alpha^m)}{(m+1)\alpha^m+(m-1)a}$$

und daher
$$\sqrt[m]{a}=\alpha+\frac{2\alpha(a-\alpha^m)}{(m+1)\alpha^m+(m-1)a}$$

und das ist die Lambert'sche Formel. —

für $\sqrt{a}=\alpha+\dfrac{2\alpha(a-\alpha^2)}{3\alpha^2+a}$ | $\sqrt[3]{a}=\alpha+\dfrac{\alpha(a-\alpha^3)}{2\alpha^3+a}$

Reihen

Geometrische Reihe

$a + aq + aq^2 + aq^3 - - - - - + aq^{n-1}$

Die Summe dieser Reihe ist

$$S = \frac{a(q^n-1)}{q-1} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{a}{q-1}$$

wo die erste der letzten Ausdrücke auf $q < 1$ und die zweite auf $q > 1$ sich bezieht.

$$(x+k)^m = x^m \left\{ 1 + m\left(\frac{k}{x}\right) + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{k}{x}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(\frac{k}{x}\right)^3 + \ldots \right\}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

setzt man $x = 1$ so erhält man

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

und setzt man diese Reihe fort, so findet man für den Werth von

$$e = 2.71828\ 1828459045\ 2353602875$$

d. h. die Basis der Neper'schen Logarithmen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\operatorname{Arc}\sin x = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{3.3.5.5.x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\operatorname{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{3.3.x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{3.3.5.5x^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots$$

$$\text{Arc tg } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots$$

$$\log. \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{m}\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right\}$$

wo m der Modulus ist.

$\sin y = m \sin(x+y)$ gibt $y = m\sin x + \frac{1}{2}m^2\sin 2x + \frac{1}{3}m^3 \sin 3x + \dots$

$\text{tg } y = \frac{m\sin x}{1 - m\cos x}$ gibt dieselbe Reihe

$\sin(z-x) = m\sin z$ gibt $z = x + m\sin x + \frac{1}{2}m^2\sin 2x + \frac{1}{3}m^3\sin 3x \dots$

$\sin\frac{z-x}{2} = m\sin\frac{z+x}{2} \dots \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x + m\sin x + \frac{1}{2}m^2\sin 2x + \frac{1}{3}m^3\sin 3x \dots$

$\text{tg }\frac{1}{2}z = \frac{1+m}{1-m}\text{tg }\frac{1}{2}x$ gibt dieselbe Reihe

$\text{tg }\frac{1}{2}y = a\,\text{tg }\frac{1}{2}x \dots\dots \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x + \left(\frac{a-1}{a+1}\right)\sin x + \frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 \sin 2x + \dots$

$$\log.\sqrt{1+2m\cos x+m^2} = 2m\cos x - \frac{1}{2}m^2\cos 2x + \frac{1}{3}m\cos 3x - \dots$$

$$\frac{1+m\cos x}{1+2m\cos x+m^2} = 1 - m\cos x + m^2\cos^2 2x - m^3\cos 3x + m^4\cos 4x \dots$$

$$\frac{m+\cos x}{1+2m\cos x+m^2} = \cos x - m\cos 2x + m^2\cos 3x - m^3\cos 4x + \dots$$

$$\frac{m\sin x}{1+2m\cos x+m^2} = m\sin x - m^2\sin 2x + m^3\sin 3x - m^4\sin 4x \dots$$

$$\log x = 2\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots\right\}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Wenn ein Bogen $p+q$ so einer ist dass q nicht gross ist, so kann man immer den Werth von $\sin(p+q)$ u. $\cos(p+q)$ aus zwei folgenden Reihen bekommen

$$\sin(p+q) = \sin p + q\cos p - \frac{q^2}{1.2}\sin p - \frac{q^3}{1.2.3}\cos p + \ldots\ldots$$

$$\cos(p+q) = \cos p - q\sin p - \frac{q^2}{1.2}\cos p + \frac{q^3}{1.2.3}\sin p + \ldots\ldots$$

welche Reihen nichts anders als Folgerung des Taylorschen Satzes sind.

Es seyen nemlich

$$\frac{\sin(p+q) - \sin p}{\cos p} = u, \text{ und } \frac{\cos(p+q) - \cos p}{\sin p} = u'$$

so hat man

$$u = q - \frac{q^2}{1.2}\operatorname{tg} p - \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\operatorname{tg} p + \ldots$$

$$u' = q - \frac{q^2}{1.2}\operatorname{ctg} p + \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\operatorname{ctg} p - \ldots$$

Durch die Umkehrung der Reihen wird seyn

$$q = u + \frac{\operatorname{tg} p}{2}u^2 + \frac{1+3\operatorname{tg}^2 p}{1.2.3}u^3 + \frac{9\operatorname{tg} p + 15\operatorname{tg}^3 p}{1.2.3.4}u^4 + \frac{9+90\operatorname{tg}^2 p + 105\operatorname{tg}^4 p}{1.2.3.4.5}$$

$$-q = u' + \frac{\operatorname{ctg} p}{1.2}u'^2 + \frac{1+3\operatorname{ctg}^2 p}{1.2.3}u'^3 + \frac{9\operatorname{ctg} p + 15\operatorname{ctg}^3 p}{1.2.3.4}u'^4 + \frac{9+90\operatorname{ctg}^2 p + 105\operatorname{ctg}^4 p}{1.2.3.4.5}$$

Seyen A und B zwei Bogen deren Unterschied nicht gross ist und sey $u = \frac{\sin A - \sin B}{\cos B}$, wenn man in obigen Reihen $q = A - B$ setzt, so erhält man

$$A-B = u + \frac{\operatorname{tg} B}{1.2}u^2 + \frac{1+3\operatorname{tg}^2 B}{1.2.3}u^3 + \frac{9\operatorname{tg} B + 15\operatorname{tg}^3 B}{1.2.3.4}u^4 + \text{etc}$$

und eben so wenn man $v = \frac{\sin A - \sin B}{\cos A}$ setzt

$$A-B = v - \frac{\operatorname{tg} A}{1.2}v^2 + \frac{1+3\operatorname{tg}^2 A}{1.2.3}v^3 + \frac{9\operatorname{tg} A + 15\operatorname{tg}^3 A}{1.2.3.4}v^4 + \text{etc}$$

Wenn $\frac{\cos A - \cos B}{\sin B} = u'$ und $\frac{\cos A - \cos B}{\sin A} = v'$, so gibt die zweite Reihe

$$B - A = u' + \frac{\operatorname{Ctg} B}{1.2} u'^2 + \frac{1 + 3\operatorname{tg}^2 B}{1.2.3} u'^3 + \frac{9 \operatorname{Ctg} B + 13 \operatorname{Ctg}^3 B}{1.2.3.4} u'^4 + \ldots\ldots$$

$$B - A = v' - \frac{\operatorname{Ctg} A}{1.2} v'^2 + \frac{1 + 3\operatorname{Ctg}^2 A}{1.2.3} v'^3 + \frac{9 \operatorname{Ctg} A + 15 \operatorname{Ctg}^3 A}{1.2.3.4} v'^4 + \ldots\ldots$$

Wenn man Gleichung $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y$ hat so kann man aus ihr immer den Bogen $x - y$ durch eine Reihe, die nach den Sinussen des vielfachen Bogens y fortschreitet, ausdrücken, nemlich, wenn man die vorige Gleichung $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tang} y$ durch die imaginäre Ausdrücke vertritt, so hat man

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{m e^{y\sqrt{-1}} - m e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}$$ welche Gleichung

auch der folgenden

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} = \frac{m e^{2y\sqrt{-1}} - m}{e^{2y\sqrt{-1}} + 1}$$ gleich ist

Setzt man $\frac{1-m}{1+m} = \theta$ so erhält man

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 + \frac{1-m}{1+m} e^{-2y\sqrt{-1}}}{e^{-2y\sqrt{-1}} + \frac{1-m}{1+m}} = e^{2y\sqrt{-1}} \cdot \frac{1 + \theta e^{-2y\sqrt{-1}}}{1 + \theta e^{2y\sqrt{-1}}}$$

nimmt man die Logarithmen und drückt man den Logarithmus des zweiten Glieds durch die Reihe aus, so wird man bekommen nach nothwendigen Reductionen

$$x - y = -\theta \sin 2y + \frac{\theta^2}{1.2} \sin 4y - \frac{\theta^3}{3} \sin 6y + \frac{\theta^4}{4} \sin 8y \text{ etc}$$

Diese vortrefliche Reihe verdanken wir dem unsterblichen Geometer Lagrange. —

Der Taylor'sche Satz gibt ein sehr einfa-
ches Mittel die Fonctionen in Reihen aufzu-
lösen. – Stellt man eine Fonction $f(x)$ durch
y vor, so hat man

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

setzt man in dieser Reihe $x=0$ und bezeichnet
durch Y, Y', Y'' etc ~~in~~ die Größen in welche
$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, etc in dieser Hypothese übergehen
so erhält man

$$f(h) = Y + Y'\frac{h}{1} + Y''\frac{h^2}{1.2} + Y'''\frac{h^3}{1.2.3} + \text{etc}$$

Schreibt man jetzt für h, x, was in den Fonctio-
nen Y, Y', Y'' keine Aenderung verursacht, denn
diese Fonctionen diesen Buchstaben nicht enthalten
so wird man haben:

$$f(x) = Y + Y'\frac{x}{1} + Y''\frac{x^2}{1.2} + Y'''\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc}$$

NB. In jeder Entwickelung nach dieser Formel
muss in Y und in seinen differentiellen Coëfficien-
ten $x=0$ gesetzt werden. –

Euler's Methode die Polynomen von der Form $(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\dots)^m$ zu entwickeln. Er hat die wiederholte Differentiation mit der Methode der unbestimmten Coefficienten combinirt, auf folgende Art:

Setzt man

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4\dots)^m = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots$$

Nimt man jetzt das logarithmische Differential von beiden Seiten und dividirt durch dx so erhält man:

$$\frac{m(\beta+2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3+\dots)}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4\dots} = \frac{B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\dots}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\dots}$$

Läßet man die Nenner verschwinden und vergleicht die Glieder die dieselbe Potenz von x multipliciren, so erhält man Gleichungen um die Coefficienten $A, B, C\dots$ zu bestimmen.

$$a^m = 1+\log a.m+\frac{1}{1.2}(\log a)^2 m^2+\frac{1}{1.2.3}(\log a)^3 m^3+\dots$$

$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ 66250$

$\frac{1}{e} = 0.36787\ 94411\ 71442\ 32159\ 55237\ 70161\dots$

$e^2 = 7.38905\ 60989\ 30650\ 22723$

$\frac{1}{e^2} = 0.13533\ 52832\ 36612\ 69189$

$e^3 = 20.08553\ 69231\ 87667\ 74092$

$\frac{1}{e^3} = 0.04978\ 70683\ 67863\ 94297$

$$\text{Sin}\,3x = 3\,\text{Sin}\,x - 4\,\text{Sin}^3 x$$
$$\text{Sin}\,5x = 5\,\text{Sin}\,x - 20\,\text{Sin}^3 x + 16\,\text{Sin}^5 x$$
$$\text{Sin}\,7x = 7\,\text{Sin}\,x - 56\,\text{Sin}^3 x + 112\,\text{Sin}^5 x - 64\,\text{Sin}^7 x$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\text{Sin}\,nx = n\,\text{Sin}\,x - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}\text{Sin}^3 x + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\text{Sin}^5 x -$$
$$- \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6.7}\text{Sin}^7 x + \ldots\ldots \pm 2^{n-1}\text{Sin}^n x$$

$$\text{Cos}\,3x = \text{Cos}\,x(1 - 4\,\text{Sin}^2 x)$$
$$\text{Cos}\,5x = \text{Cos}\,x(1 - 12\,\text{Sin}^2 x + 16\,\text{Sin}^4 x)$$
$$\text{Cos}\,7x = \text{Cos}\,x(1 - 24\,\text{Sin}^2 x + 80\,\text{Sin}^4 x - 64\,\text{Sin}^6 x)$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\text{Cos}\,nx = \text{Cos}\,x\Big(1 - \frac{n^2-1}{1.2}\text{Sin}^2 x + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{1.2.3.4}\text{Sin}^4 x -$$
$$- \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{1.2.3.4.5.6}\text{Sin}^6 x + \ldots\ldots \pm 2^{n-1}\text{Sin}^{n-1} x\Big)$$

In den zwei vorhergehenden Reihen gilt das obere Zeichen wenn $\frac{n-1}{2}$ ~~ist~~ ~~[illegible]~~ eine gerade Zahl ist, sonst das untere

$$\text{Sin}\,2x = 2\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x$$
$$\text{Sin}\,4x = (4\,\text{Sin}\,x - 8\,\text{Sin}^3 x)\,\text{Cos}\,x$$
$$\text{Sin}\,6x = (6\,\text{Sin}\,x - 32\,\text{Sin}^3 x + 32\,\text{Sin}^5 x)\,\text{Cos}\,x$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\text{Sin}\,nx = \Big(n\,\text{Sin}\,x - \frac{n(n^2-2^2)}{1.2.3}\text{Sin}^3 x + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5}\text{Sin}^5 x -$$
$$- \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)(n^2-6^2)}{1.2.3.4.5.6.7}\text{Sin}^7 x + \ldots \mp 2^{n-1}\text{Sin}^{n-1} x\Big)\,\text{Cos}\,x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x$$

$$\cos 6x = 1 - 18\sin^2 x + 48\sin^4 x - 32\sin^6 x$$

. . . .

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{1.2}\sin^2 x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{1.2.3.4}\sin^4 x -$$

$$- \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5.6}\sin^6 x + \ldots \pm 2^{n-1}\sin^n x$$

Bei diesen zwei vorhergehenden Reihen gilt das obere Zeichen wenn $\frac{n}{2}$ eine gerade Zahl ist.

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1-6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$$

$$\operatorname{tg} 5x = \frac{5\operatorname{tg} x - 10\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x}{1-10\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg}^4 x}$$

- - - - - - - - - - - - - - -

$\operatorname{tg} nx = \frac{A}{B}$ wo

$$A = n\operatorname{tg} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\operatorname{tg}^5 x - \ldots$$

$$\ldots \mp n\operatorname{tg}^{n-1} x$$

$$\pm \operatorname{tg}^n x$$

$$B = 1 - \frac{n(n-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4 x - \ldots$$

$$\ldots \pm \operatorname{tg}^n x$$

$$\pm n\operatorname{tg}^{n-1} x$$

Hier gilt das obere Glied wenn n eine gerade Zahl ist, das untere wenn n ungerade, und das obere Zeichen wenn im ersten Falle $\frac{n}{2}$, im zweiten $\frac{n-1}{2}$ gerade ist, das untere aber wenn Gegentheil ist.

$$tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \frac{62x^9}{3.5.7.9.3} + \frac{1382x^{11}}{3.5.7.9.11.3.5} + \ldots$$

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{2.3} + \frac{1.3\,\sin^5 x}{2.4.5} + \frac{1.3.5\,\sin^7 x}{2.4.6.7} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\,\sin^{2n+1} x}{2.4.6\ldots2n(2n+1)} + \ldots$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \Big\{\cos x + \frac{\cos^3 x}{2.3} + \frac{1.3\,\cos^5 x}{2.4.5} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)\,\cos^{2n+1} x}{2.4.6\ldots2n(2n+1)} + \ldots\Big\}$$

$$x = tg\,x - \frac{1}{3}tg^3 x + \frac{1}{5}tg^5 x - \frac{1}{7}tg^7 x + \ldots \pm \frac{1}{2n+1}tg^{2n+1}x \mp \ldots$$

$$x - \text{Chord.}\,x = \frac{x^3}{4.6} - \frac{x^5}{4.6.8.10} + \frac{x^7}{4.6.8.10.12.14} - \ldots$$
$$= \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{3} + \frac{1.3\,\sin^5 \frac{x}{2}}{4.5} + \frac{1.3.5\,\sin^7 \frac{x}{2}}{4.6.7} + \ldots$$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \ldots$$
$$= \frac{\sin^3 x}{2.3} + \frac{1.3\,\sin^5 x}{2.4.5} + \frac{1.3.5\,\sin^7 x}{2.4.6.7} + \ldots$$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots\right)$$

Setzt man $\frac{1+x}{1-x}=\frac{z^2}{z^2-1}$ und daraus $x=\frac{1}{2z^2-1}$

so findet man

$$\log z = \frac{l(z+1)+l(z-1)}{2} + \frac{1}{2z^2-1}+\frac{1}{3(2z^2-1)^3}+\dots$$

Nennt man die Reihe $\frac{1}{2z^2-1}+\frac{1}{3(2z^2-1)^3}+\dots = P_z$

so bekommt man

$$\log z = \frac{l(z+1)+l(z-1)}{2}+P_z$$

So ist z.B.

$$\log 2 = \frac{l3}{2}+P_2 \qquad \log 3 = \frac{3}{2}l2 + P_3$$

und daraus

$$\log 2 = 2(2P_2+P_3) \qquad \log 3 = 2(3P_2+2P_3)$$

$$P_2 = \frac{1}{7}+\frac{1}{3.7^3}+\frac{1}{5.7^5}+\dots$$

$$P_3 = \frac{1}{17}+\frac{1}{3.17^3}+\frac{1}{5.17^5}+\dots$$

Man weiss dass

$$\log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots$$
$$= -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots\right)$$

für $x=1$ bekommt man

$$\log 0 = -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots\right)$$

weil aber $\log 0$ = dem negativen Unendlichen so hat ~~man~~ einen Beweiss dass die harmonische Reihe in der That eine unendliche grösse ist

Nennt man S die Summe der harmonischen Reihe oder setzt man

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

so wird $\qquad (\alpha)$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots$$

da also die Summe der Glieder mit geraden Nennern ist gleich der Hälfte der Summe S, so müssen die Glieder mit ungeraden Nennern die andere Hälfte ausmachen, oder es wird auch

$$\frac{1}{2}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots \qquad (\beta)$$

Zieht man (α) von (β) ab, so wird

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

aber $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

welcher im Falle $x = 1$ in folgender übergeht

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

woraus würde folgen

$$\log 2 = 0$$

Dieser Unsinn schreibt sich daher, dass man die Ergänzungen in den vorigen Reihen nicht berücksichtigt hat, und warnt uns zugleich wie es ~~mit~~ gefährlich ist bei den Reihen Schlüsse zu machen ohne die Natur der Functionen zu kennen. —

$$2^{n-1}\cos x^n = \left\{\cos nx + \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x + \binom{n}{3}\cos(n-6)x + \binom{n}{4}\cos(n-8)x + \dots\right\}$$

Diese Formel setzt man so lange fort bis man auf den Bogen = 0 komt und wenn n eine gerade Zahl ist, nimt man nur die Hälfte des Coefficienten von diesen Bogen. So bekomt man

$$\cos x = \cos x$$
$$2\cos x^2 = \cos 2x + 1$$
$$4\cos x^3 = \cos 3x + 3\cos x$$
$$8\cos x^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3$$
$$16\cos x^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x$$
$$32\cos x^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10$$
$$64\cos x^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x$$

u. s. w.

$$\pm 2^{n-1}\sin x^n = \left\{\cos nx - \binom{n}{1}\cos(n-2)x + \binom{n}{2}\cos(n-4)x - \binom{n}{3}\cos(n-6)x + \dots\right\}$$

Diese Formel gilt für den Fall, wenn n eine gerade Zahl ist und das obere Zeichen wenn n ein Vielfaches von 4, das untere aber wenn n ein Vielfaches von 2 ist. –

Für den Fall wo n eine ungerade Zahl ist, ist folgende Formel

$$\pm 2^{n-1}\sin x^n = \left\{\sin nx - \binom{n}{1}\sin(n-2)x + \binom{n}{2}\sin(n-4)x - \binom{n}{3}\sin(n-6)x + \dots\right\}$$

Das obere Zeichen wenn $n-1$ ein Vielfaches von 4 und das untere wenn

n-1 ein Vielfaches von 2 ist: Auf die Art bekomt man

$\sin x = \sin x$

$2 \sin x^2 = -\cos 2x + 1$

$4 \sin x^3 = -\sin 3x + 3 \sin x$

$8 \sin x^4 = \cos 4x - 4 \cos 2x + 3$

$16 \sin x^5 = \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x$

$32 \sin x^6 = -\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x - 10$

$64 \sin x^7 = -\sin 7x + 7 \sin 5x - 21 \sin 3x + 35 \sin x$

u. s. w.

Um in der arithmetischen Reihe

$1^m, 2^m, 3^m, 4^m, \ldots\ldots n^m$ der Ordnung m

die Summenformel zu finden, setzt man

$$\int(n^m) = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots\ldots + n^m$$

$$= P_1 n^{m+1} + P_2 n^m + P_3 n^{m-1} + \ldots\ldots + P_{m+1} n$$

schreibt man in dieser Reihe n+1 statt n so wird man haben

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots\ldots + n^m + (n+1)^m =$$

$$= P_1 (n+1)^{m+1} + P_2 (n+1)^m + P_3 (n+1)^{m-1} + \ldots\ldots + P_m (n+1)^2 + P_{m+1}(n+1)$$

und wenn man von dieser Gleichung die vorige abzieht

$$(n+1)^m = P_1 \{(n+1)^{m+1} - n^{m+1}\} + P_2 \{(n+1)^m - n^m\} \ldots\ldots + P_{m+1} \{(n+1) - n\}$$

oder wenn man entwickelt und alles nach n ordnet, so bekomt man durch die Vergleichung der Coëfficienten

$P_1 = \frac{1}{m+1}, \; P_2 = \frac{1}{2}, \; P_3 = \frac{m}{12}, \; P_4 = 0, \; P_5 = 0$ etc

die letzte Vergleichung der Coëfficienten von n^0 d. h.

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots\ldots + P_{m+1} = 1$

kann zur Verification der gefundenen Coëfficienten dienen.

Substituirt man die so gefundenen Werthe für P_1, P_2 etc in der obigen Gleichung, so bekommt man

$$S(n^m) = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\binom{m}{1}n^{m-1} - \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\binom{m}{3}n^{m-3} + \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{6}\binom{m}{5}n^{m-5}$$
$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{8}\binom{m}{7}n^{m-7} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{10}\binom{m}{9}n^{m-9} - \dots\dots$$

diese Reihe wird so weit fortgesetzt als es möglich ist ohne dass der Exponent von n kleiner als $+1$ wird. Die Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}$ .. etc heissen Bernoullische Zahlen weil sie zuerst von Jakob Bernoulli angegeben wurden. — Wenn man sie durch $B_1, B_2, B_3 \dots$ bezeichnet, so ist

$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730}$ etc

Das Gesetz dieser Zahlen ist zuerst vom Moivre aufgefunden worden, und bestehet in den folgenden Gleichungen

$$3B_1 = \frac{1}{2},\quad 5B_2 = \frac{4.3}{1.2}.1B_1^2;\quad 7B_3 = \frac{6.5}{1.2}.2B_1B_2,$$
$$9B_4 = \frac{8.7}{1.2}.2B_1B_3 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.1B_2^2$$
$$11B_5 = \frac{10.9}{1.2}.2B_1B_4 + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.2B_2B_3,$$
$$13B_6 = \frac{12.11}{1.2}.2B_1B_5 + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}.2B_2B_4 + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}.1B_3^2$$

etc.

Wenn A die Länge eines Bogens von a° oder a' oder a'' bedeutet, so erhält man sehr schnell und scharf diese Länge nach folgenden Formeln

$\log A = \log a^\circ - 1.758122632409172215452526$
$\log A = \log a' - 3.536273882742815847961293$
$\log A = \log a'' - 5.314425133176459480470060$

d. h. $A = \frac{a^\circ\pi}{180} = \frac{a'\pi}{180.60} = \frac{a''\pi}{180.60.60}$ für den Halbmesser $= 1$.

Kalender

Von 1. Januar angefangen pflegt man die Tage des Jahres durch
die 7 Buchstaben A, B, C, D, E, F, G nach der Ordnung zu bezeichnen
so daß der 8. Tag 15, 22 etc. Januar wieder den Buchstaben A haben.
Derjenige Buchstabe welcher in einem gegebenen Jahre auf einen
Sontag fällt, heißt Sonntagsbuchstabe dieses Jahres.
Der Sonnenzyrkel heißt diese Periode nach welcher
die Sonntagsbuchstaben in derselben Ordnung wiederkehren.
Da ein gemeines Jahr = 365 = 52×7+1 so geht alle Jahr der
Sonntagsbuchstabe um eine Stelle rückwärts. In Schaltjahren
aber die 366 = 52×7+2 Tage haben bezeichnet man den 23. Februar
und den folgenden Schalttag mit denselben Buchstaben
d. h. mit E, damit die Ordnung der Buchstaben bis zu Ende
des Jahres nicht unterbrochen werde, daher ein solches Jahr
zwei Sontagsbuchstaben hat, von denen der erste bis den 24. Febr.
und der andere d. h. nächstvorhergehende nach diesen Tag gilt.
Im Julianischen Kalender wo jedes vierte Jahr ein Schaltjahr
ist, werden die Sontagsbuchstaben in einer Periode 28 = 4×7
wiederkehren, und die Zahl welche ausdrückt das wievielte
Jahr dieser Periode ein gegebenes Jahr der christlichen
Zeitrechnung ist heißt Sonnenzyrkel. Man setzte den
Anfang dieser Periode 9 Jahre vor der Christi Geburt und gab
den Sontagsbuchstaben den letzten oder den 28 Jahre dieser Periode den
A. Um also den Sonnenzyrkel zu finden addire man zu einer
gegebenen Jahreszahl die Zahl 9 und dividire durch 28, so ist
der Rest der Sonnenzyrkel. —
Die Epacten ist nichts anders als das Alter des Mondes den
1. Januar jedes Jahres. Da aber 12 Monate zu 29.530587 Tage
sich um 10.883 von einem Julianischen Jahre zu 365.25 unterscheiden, so nehmen die Epacten jedes Jahr um 11 Tage zu wenn man statt 10.883 in
runder Zahl 11 Tage nimmt. Nennt man N die goldene Zahl für ein
gegebenes Jahr, so ist die Julianische Epacte $E = \frac{11N}{30r}$ [illegible]
Da aber 19 Julianische Jahre 6939.7500 und 235 synodische
Monate 6939.6878 Tage also nur um 0.062 Tage weniger betragen, so fallen die Neumonde, nach 19 Jul. Jahren, also auch
die Epacten auf dieselben Monatstage, und die obige Differenz

0.0621 Tage beträgt erst nach 300 Jahren nahe einen Tag.
Man nennt diese neunzehnjährige Periode Mondcyrkel
und die Zahl welche anzeigt das wievielte ein gegebenes Jahr
in dieser Periode ist, die goldene Zahl, die für beide Kalender
den Julianischen und Gregorianischen dieselbe ist und nach
19 Jahre periodisch wiederkehrt. Das erste Jahr die-
ser Periode war das unmittelbar vor Christi Geburt, daher
wird für jedes gegebene Jahr C die goldene Zahl gefunden
für den russischen Kalender muss man C+5508 durch 19 dividiren
indem man C+1 mit 19 dividirt, der Rest dieser Division
ist die gesuchte goldene Zahl. — Die Gregorianischen Epac-
ten sind für die Jahre vom 1700 bis 1800 um 11 von 1800–1900
auch 11 von 1900 bis 2200 um 12 Tage kleiner. Die Ursache
davon ist die Reform in 1582 wo man 10 Tage weggenommen
hatte.

Um den Ostersonntag zu finden, sey das gegebene Jahr
A, nenne man die Reste von den folgenden Divisionen a, b, c, d, e
$\frac{A}{19}$ # a, $\frac{A}{4}$ # b, $\frac{A}{7}$ # c, $\frac{m+19a}{30}$ # d, und endlich
$\frac{n+2b+4c+6d}{7}$ # e, so ist immer der Ostertag der
$(22+d+e)$te März oder der $(d+e-9)$te April.

Im Julianischen Kalender ist immer $m=15$ und $n=6$.
Für den Gregorianischen muss man nach Folgendes bemer-
ken. Wenn die Rechnung für den Ostersonntag den 26. April
gibt, so muss man immer den 19. April nehmen, und für den
25. April muss man den 18. April nehmen wenn $d=28$ und
$a>10$ ist. Endlich im Gregorianischen Kalender ist

	m	n	
von 1700–1799	23	3	Ostergrenzen 22 März und 25. April
1800–1899	23	4	
1900–1999	24	5	

Der Durchmesser der Sonne = Durchgang durch den Meridian ×

$$\times \frac{15.\ \text{Sin. Poldistanz}}{1+\frac{x''}{86400}}$$

wo x'' ist die Anzahl der Zeit-Secunden die die Uhr über 24
Stunden in zwei Durchgängen der Sonne durch den Meri-
dian gemacht hat. —

Główniejsze epoki

	po stw. świata	przed Chryst.	peryjod Juli.
Rozejście się narodów	1809	2174	2539
Panowanie Cekropsa	2426	1557	3156
Wyjście z Egiptu	2453	1530	3183
Upadek Troi	2800	1183	3530
Budowa Kościoła Salomona	2972	1011	3702
Pierwsze Olimpijady	3208	775	3938
Założenie Rzymu	{3230 / 3232}	{753 / 751}	3960
Epoka Ptolemeuszów	3237	746	3967

Według tekstu hebrajskiego biblii, od stworzenia świata do Chrystusa upłynęło lat 4004
według tekstu samarytańskiego — — — 4700
według 70 tłomaczów — — — 5872
według innych komentatorów — — — 5963

Aby znaleźć na jaki dzień tygodnia przypada pewna data t.j. pewny d^{ty} dzień roku, stylu Juliańskiego potrzeba obrachować

$$P = N + \frac{N-1}{4} + d + 5$$

gdzie N znaczy liczbę wyrażającą rok w którym owego dnia szukamy a reszta z dzielenia $\frac{N-1}{4}$ wypadająca zaniedbuje się. Tak otrzymane P dzieli się przez 7, kiedy jeżeli pozostała reszta $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0$, dzień d^{ty} będzie Niedziela, Poniedziałek, Wtorek, Środa, Czwartek, Piątek, Sobota. Z d znajduje się bardzo łatwo z następującej tablicy

	Lut	Mar	Kwie	Maj	Czerw	Lip.	Sierp	Wrzes	Paźd	List.	Grud.
Rok zwycz.	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
— przestęp.	31	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335

Przykład Jaki był dzień tygodnia 24. Marca 1794?

$N = 1794$

$\frac{N-1}{4} = 448$

$d = 83$

5

$P = 2330$

$$\frac{P}{7} = \frac{2330}{7} = 332 + \frac{6}{7} \quad \text{t.j. } r = 6$$

zatem dzień 24. Marca 1794 roku był Piątek w Juliańskim Kalendarzu, zaś w Gregoriańskim ~~[illegible]~~ Poniedziałek

W Gregoriańskim stylu obrachować potrzeba

$$P = \left(N + \frac{N-1}{4} + \frac{N-1}{400} + d\right) - \left(\frac{N-1}{100} + \frac{N-1}{4000}\right)$$

gdzie także reszty z dzielenia zaniedbuje się, po czem r i dzień tygodnia znajdzie się jako wyżej.

Zum Kalender

Um den Sontagsbuchstaben zu finden, dient fol-
gende Gleichung dazu

$$x = \frac{d+e+4}{7}$$

in welcher d und e die vorige Bedeutung nemlich
d = dem Reste aus der Division $\frac{m+19a}{30}$, e = dem Reste
aus der Division $\frac{n+2b+4c+6d}{7}$, haben. In dieser
Gleichung bemerkt man bloss den Rest r. Ist
der Rest $r=0$ so ist der Sonntagsbuchstabe G
$r=1$ – – – – – – – – – – – – – – – A
$r=2$ – – – – – – – – – – – – – – – B
$r=3$ – – – – – – – – – – – – – – – C
$r=4$ – – – – – – – – – – – – – – – D
$r=5$ – – – – – – – – – – – – – – – E
$r=6$ – – – – – – – – – – – – – – – F

Ist das Jahr ein Schaltjahr, so hat man vor den ~~vorstehenden~~
gefundenen Buchstaben noch dessen ~~nach~~ folgenden
zu setzen der für den Jänner und bis zum 24. Febr.
dienen wird, und von da der auf die obige Art
gefundene.

Der rechnende Astronom ist sehr oft genöthigt die
chronologischen Data mit einander zu vergleichen
und das eine in das andre zu verwandeln. Dies geschieht
am bequemsten auf folgende Weise.
Es sey, allgemein genommen, in einer Periode, deren Anfang
in das Jahr a der christlichen Zeitrechnung fällt, und de-
ren Jahreslänge L ist, das Jahr M und der Tag m dieses
Jahrs gegeben; so kann man das diesem Datum entspre-
chende Jahr M' einer andern Periode, deren Anfang in das
Jahr a' der christlichen Zeitrechnung fällt und in der
die Länge des Jahrs L' ist, durch die Gleichung

$$M' = \frac{365.25(a'-a)+(M-1)L+(m-1)}{L'} \quad ----(1)$$

bestimmen.

Die Ere der französischen Revolution fängt den 22. Sept.
des Jahres 1792. an. Das Jahr bestand aus 365 Tagen in 12 Mo-
nate ~~zu~~ 30 Tagen getheilt, wozu noch 5, so genannte comple-
mentar Tage kamen. Diese Zeitrechnung erhielt sich
nur 14 Jahre, also d. Jahr 1806 wurde wieder mit 1. Jänner
angefangen.

Die vornehmsten Perioden, ihr Anfang im Julianischen Kalender, und ihre Jahrslänge sind folgende

	Anfang in Julian. Kal.	Länge der Jahre
Christliche Periode	0.000	365 1/4 Tage
Dschelaleddinische	–1078.195	365 8/33
Diocletianische	– 283.660	365 1/4
Erbauung Roms	+ 311.250	365 1/4
Jezdegerdische	– 631.459	365
Julianische	+4713.000	365 1/4
Mahomedanische	– 621.538	354 11/30
Seleucidische	+ 754.000	365 1/4
Weltschöpfung nach Eusebius	+5199.334	365 1/4
Dieselbe nach d. Constan. Aere	+5508.334	365 1/4

Am häufigsten kommt wohl der Fall vor, zu erforschen auf welches Datum unserer christlichen Zeitrechnung irgend eine gegebene Epoche einer andern Periode fällt. In diesem Fall dient die Gleichung

$$M' = -a + 0.00273785\{(M-1)L + (m-1)\} \quad \text{--}(2)$$

in der M und m das gegebene Jahr und der gegebene Tag der Periode, M' aber das entsprechende Datum der christlichen Zeitrechnung ist. Auf die Art wird es seyn für die Dschelaleddinische Periode

$$M' = +1077.192 + 0.999979 M + 0.00273785 m$$

für Erbauung Roms $M' = -755.003 + M + 0.00273785 m$

Jezdegerdische $M' = +630.457 + 0.999315 M + 0.00273785 m$

Mahomedanische $M' = +620.568 + 0.970263 M + 0.00273785 m$

Seleucidische $M' = -312.253 + M + 0.00273785 m$

Um ein Julianisches Datum durch das einer andern Zeitrechnung auszudrücken, kann man folgende Gleichung anwenden

$$M' = \frac{365.25(a' + M - 1) + (m-1)}{L}$$

die für verschiedene Perioden numerisch in der Form

$$M' = \alpha + \beta M + \gamma m$$

entwickelt werden kann. So ist z. B. für die türkische Periode in welcher $a' = -621.538$ und $L = 354\frac{11}{30}$

$$M' = -641.656 + 1.030712 M + 0.0028219 m$$

Astronomie

Sonne

Mittlere Entfernung der Sonne von der Erde
ist = 23984 Halbmesser der Erde.

Tägliche mittlere Bewegung in der Ecliptik
= 59' 8",3299

Die grösste Mittelpunktsgleichung
nach Delambre = 1° 55' 26".8
nach Laplace = 1 55 27.3

Dauer der Rotation der Sonne = 25½ Tage
Die Axe der Sonne ist 7° 30' gegen der der
Ecliptick geneigt. —

Mittlere Sonnenparallaxe
nach Laplace = 8".66 — 8".551 Littrow
nach Encke = 8.5776 und nach Bessel

Scheinbarer ~~Halb~~ Durch messer der Sonne wenn die Erde
im Perihel ist, = 32' 34".6
im Aphel 31 31.8
also mittlerer ~~Halb~~ Durch messer = 32' ~~2".9~~ 1".8

Wahrer Durchmesser der Sonne ist = ~~111.4454~~ 112.06 Mahl
mittlerer Durchmesser der Erde (: 109.25 Erddurchmesser :)

Also Körperlicher Inhalt 138447,2 Mahl grösser
als der der Erde. — 3468 Billionen Cub. Meilen

Ihre Masse 354936 Mahl grösser als
die der Erde. —

Ein Körper der unter dem irdischen Aequator ~~wiegt~~
ein Pfund, wiegt ~~unter~~ unter dem der Sonne wiegt er ~~2,8~~ 28.36 Pfunde
und die Körper fallen dort 334,65 Fuss herunter in der ersten
Zeitsecunde. — (: 428 Par. Fuss ~~Littrow~~ Herschel :)

Mercur

Durchmesser des Mercurs = 600 d. Meilen

Mittlere Entfernung von der Sonne

= 0.3870981, die der Erde = 1 gesetzt.

Siderische Revolution = 87.969258 Sonnentage

Synodische - - - 115.877 mittlere Sonnentage

Mittlere Bewegung in seiner Bahn = 4° 5' 32".6

Neigung seiner Bahn gegen die Ecliptik = 7° 0' 9".1

und um 0".1818 nimt jährlich zu

Die Excentricität Mercurs Bahn = 0.2055 1494 die

halbe grosse Axe = 1 angenommen

Größte Mittelpunktgleichung = 23° 39' 51" und

die seculäre Zunahme = + 1".6

Dauer seiner Rotation = 24h 5m 28".3

Wahrer Durchmesser = 0.398 der der Erde = 1

Körperlicher Inhalt = 0.063 " "

~~Die~~ Körper die auf der Erde ~~wiegen~~ ein Pfund

wiegen, wiegen sie auf dem Mercur 1.03 Pfund

Elongation ändert sich von 16° 12' bis 28° 48"

Zum ersten Mahl wurde der Durchgang des Mercurs über die Sonnen-

scheibe von Gassendi im November 1631 beobachtet

Für einige Jahrhunderte kan diese Erscheinung ~~k~~ nur im

May oder November Stat haben. und so wird haben

* 1832 May 5	* 1878 May 6
1835 Novemb 7	1881 Novem 7
* 1845 May 8	1891 May 9
* 1848 Novem 9	1894 Novem 16
* 1861 Novemb 11	1901 Novem 4
* 1868 Novemb 4	

Die mit * bezeichneten werden in unseren Gegenden

sichtbar

Venus

Durchmesser der Venus = 1678 deutsche Meilen

Mittlere Entfernung von der Sonne

= 0.7233316 die der Erde = 1

Siderische Revolution = 224.7007869 Tage

Synodisch ——— 583.920 Tage

Mittlere Bewegung in der Bahn = 1° 36' 7."8

Neigung ihrer Bahn gegen die Eclipt. = 3° 23' 28."5

jährliche Abnahme = 0."0455

Excentricität = 0.00686074 halbe große Axe = 1

Größte Mittelpunktsgleichung = 0° 47' 15" mit

jährlichen Abnahme 0."25

Dauer ihrer Rotation = 23h 21' ~~7."8~~ 23."93

Scheinbarer Halbmesser = 16."9 und ändert sich

zwischen 9."6 bis 61."2

Wahrer Durchmesser = 0.975 der der Erde = 1

Körperlicher Inhalt = 0.927 d° d°

Körper die bei uns ein Pfund wiegen, wiegen sie auf

der Venus nur 0.958 Pfund

Ihre Elongation zwischen 45° und 47° 12'

Durchgang der Venus über Sonnenscheibe

kann bloß im Juni und December für einige

Jahrhunderte Stat haben, und so

1874	Decem	8
1882	Decem	6
2004	Junii	7
2012	Juni	5
2117	Decemb	10
2125	Decem	8
2247	Juni	11
2255	Junii	8

Erde

Siderische Revolution = $365^d\ 6^h\ 9'\ 9''.6$
Tropische — $365.\ 5\ 48\ 49.7$
Das anomalistische Jahr = $365\ 6\ 13\ 49.3$ nach Laplace
Luni-Solar Precession = $50''.41$ in einem Jahre
und allgemeine Praecession in der Länge = $50''.10$
(Dauer der Revolution der Aequinoctien = 25868 Jahre
Excentricität der Ecliptik = 0.01678356 8 die
halbe grosse Axe = 1
Verhältniss der Axen $1 : 0.99986$
Von Zeiten des Hipparchus bis jetzt hat sich
nicht $0''.003$ die Zeit der Rotation der Erde geändert.
Mittlere Sonnentag = $24^h\ 3'\ 56''.55$ Sternzeit
Sterntag = $23\ 56\ 4.09$ Mittlerezeit
oder allgemein

Sternzeit = $1.00273791 \times$ Mittlere Sonnenzeit
Mittlere Sonnenzeit = $0.99726967 \times$ Sternzeit
Die Dichte der Erde = 3.9326 Mahl grösser als die
der Sonne und zur Dichte des Wassers ist wie $11 : 2$
Schwerkraft unter dem Aequator = 1 gesetzt
~~und~~ so ist für jeden andern Ort diese Schwere
$= 0.00539 \cdot \sin^2\varphi$, φ die Breite
Sey p Länge eines Pendels unter dem Aequator
so ist für jeden andern Ort sehr nahe

Länge des Secunden-Pendels = $p(1 + 0.00539 \cdot \sin^2\varphi)$
~~Mittlerer Halbmesser der Erde = 3266.611 Klafter~~

Länge eines jeden Grads der Breite ist = $\frac{3d}{c}\sin^2\varphi$
wo c das Verhältniss der Axen und d die Länge
eines Grads unterm Aequator bedeutet. —
Die Centrifugalkraft = 0.00346 der Schwere
Ein Körper der unter dem Aequator 1 wigt
und seine Schwere unter der Polhöhe φ = 1+0.00539 $\sin^2\varphi$
Das Licht von der Sonne kommt zu uns in
8' 13."3 in welcher Zeit macht die Erde 20."25
in ihrer Bahn, daher die Aberration

Das tropische Jahr = 365^T 5^h 48' 52" } Pimsant
siderische — — = 365 6 9 12
anomalistische = 365 6 13 58.8

Schiefe der Ecliptik für irgend einen Tag
des Jahres ist

$$\omega - \frac{n.0."52}{365} + 0."4345\cos 2\odot + 9."648\cos\Omega$$

ω ist die Schiefe der Ecliptik für den 1. Jänner
n der Tag des Jahres für welchen die Schiefe
der Ecliptik gesucht wird.

Fallraum in einer Secunde = 15.11 Paris Fuss.

Durchmesser der Erde = 1719 deutsche Meilen
Durchmesser der Erdbahn = 42 Mill. deutsche Meilen

Mars

Mittlere Entfernung von der Sonne ist 1.5236923 die der Erde 1. — (1 Jahr 322 Tage 17 Stund)

Siderische Revolution = 686.t 9796458 Sonnentage

Synodische ——— 779.936 ———

Mittlere Bewegung in seiner Bahn = 31' 26.'' 66

Neigung der Bahn = 1° 51' 6.'' 2 die um 0.'' 014 in einem Jahre abnimmt. —

Die Excentricität = 0.0933070

Die größte Mittelpunktsgleichung = 10° 40' 50'' die um 0.'' 37 in einem Jahr zunimmt. —

Dauer der Rotation 24h 39' 21.'' 3

Seine Parallaxe ist sehr nahe die zweifache der Sonne

Scheinbarer Durchmesser in seiner mittleren Entfernung von der Erde = 6.'' 29.

Der größte = 18.'' 28

Kleinste = 3. 60

Der Körper der hier auf der Erde ein Pfund wiegt wiegt er auf dem Mars nur 1/3 Pfund

Umlaufszeit = 1 Jahr und 322 Tage

Durchmesser des Mars = 1000 deutsche Meilen

Durchmesser der Marsbahn = 64 Mill deutsche Meilen

Vesta

Von Dr. Olbers den 29. März 1807 entdeckt

Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.367870

Siderische Revolution = ~~1325.~~7431 Sonnentage (3 Jahre 345 Tage)

Synodisch —— = 503.41

Mittlere Bewegung = 16' 17".9516

Neigung ihrer Bahn = 7° 8' 9" und in einem Jahre um 0".12 abnimmt nach Santini

Die Excentricität = 0.089130

Die größte Mittelpunktsgleichung = 10° 13' 22"

Juno

Von Harding den 1. September 1804 entdeckt

Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.669009

Siderische Revolution = ~~1592.6608~~ 4 Jahre 126 Tage

Synodische —— = 473.95

Mittlere Bewegung = 13' 32".9304

Neigung = 13° 4' 9".7

Die Excentricität = 0.257848

Die größte Mittelpunktsgleichung = 29° 46' 19"

Umlaufszeit der Vesta 3 Jahre und ~~240~~ 348 Tage
— — — der Juno 4 — — 131 —

Durchmesser der Vesta = 59 deutsche Meilen
— — — — der Juno = 308 — —

Durchmesser der Vestabahn = 98 Mill. d. M.
— — — der Junobahn = 110 — —

Ceres

Von Piazzi den 1. Jänner 1801 entdeckt

Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.767245

Siderische Revolution = 1681.3931 Sonnentage
Synodische — 466.62
Mittlere Bewegung = 12' 50".923
Neigung = 10° 37' 26".2 und ihre jährliche Änderung = 0".44 nach Gauss
Excentricität = 0.078439
Größte Mittelpunktsgleichung = 8° 59' 42"

Pallas

Von Olbers den 28. März 1802 entdeckt

Ihre Mittlere Entfernung von der Sonne = 2.772886
Siderische Revolution = 1686.5388 Sonnentage
Synodische — 466.22
Mittlere Bewegung = 12' ~~44" 25~~ 48".3934
Neigung 34° 34' 55".0
Excentricität = 0.241648
Größte Mittelpunktsgleichung = 27° 49' 19"
Umlaufszeit der Ceres = 4 Jahre u. 221 Tage
— — — der Pallas = 4 — 222 —
Durchmesser der Ceres = 358 deutsche Meilen
— — — der Pallas = 3152
Durchmesser der Ceresbahn = 114 Mill. d. M.
— — der Pallasbahn = 114 —

Jupiter

Durchmesser des Jupiters = 19,980 d. M.
Durchmesser der Jupitersbahn = 217 Mill. d. M.

Mittlere Entfernung von der Sonne = 5.202776
was beiläufig ~~110~~ 107 Millionen Meilen ist

Siderische Revolution = 4332.5848212 Sonnentage (11 Jahre und 317 Tage 20h 14' 10")
oder sehr nahe 12 Jahre

Diese Periode aber ist manchen Ungleichheiten unterworfen.

Synodische Revolution = 398.867 Tage

Mittlere Bewegung in seiner Bahn = 4' 59".26 in einem Sonnentage

Neigung der Bahn = 1° 18' 51".3 im Anfange dieses Jahrhundertes, die in einem Jahre um 0".226 ~~wächst~~ abnimmt

Excentrizität = 0.0481621 die große Axe als Einheit angenommen, diese wächst in 100 Jahren um 0.00015935.

Größte Mittelpunktsgleichung = 5° 31' 13".8 und wächst um 0".6344 in einem Jahre.

Dauer seiner Rotations-Bewegung = 9h 55' 49".7.

Neigung seiner Axe gegen Ekliptik = 3° 5' 30".

Scheinbarer Durchmesser = 36".74

Körperlicher Inhalt = 1280.9 der der Erde als Einheit angenommen.

Der Körper der hier auf der Erde 1 Pfund wiegt, wiegt er auf dem Jupiter 2.716 Pfund

Das Axen-Verhältniss = 167:177

~~Der Körperliche Inhalt = 1280.9, der der Erde 1 genommen.~~

Saturn

Mittlere Distanz von der Sonne = 9.5387861
was gegen 890 Millionen Meilen ist. –
Siderische Revolution = 10759.2198174 Sonnentag
oder 29.456 Julianische Jahre
Synodische Revolution = 378.090 Sonnentage
Mittlere Bewegung = 2' 0."6 in 1 Tag
Neigung der Bahn für den Anfang dieses Jahr-
hundertes = 2° 29' 35."7 und nimt 0".155 in 1 Jahr ab
Excentricität = 0.05615050 und um 0.000312402 nimt
ab in hundert Jahren
Die größte Mittelpunktsgleichung = 6° 26' 12" und
um 1".279 nimt ab in 1 Jahre
Seine Rotationsbewegung dauert nur 10h 29' 16."8
Neigung seiner Axe gegen die Ecliptik = 31° 19'
Scheinbarer Durchmesser = 16".20 und wahrer
Durchmesser, ~~mit~~ der der Erde als Einheit genom-
men, ist = 9.982 was beinahe 76068 Meilen
macht. – Das Verhältniß der Axen ist 11:12
Sein Volum = 995.00 daß der Erde 1 angenommen
Ein Körper der auf der Erde ein Pfund wiegt (wird) unter
dem Saturns-Aequator ~~xxx~~ 1.01 Pfund wiegen
Durchmesser des Saturns = 16290 d. M.
Durchmesser der Saturnsbahn = 498 Mill. d. M.

Uranus

Wurde von Herschel den 13. März 1781 entdeckt,
Er war schon im Jahre 1690 als ein Fixstern be-
obachtet, er wurde auch von Flamsteed, Bradley
und Mayer beobachtet auch von Lemonnier
keiner aber hat gedacht er wäre ein Planet. –

Mittlere Entfernung von der Sonne = 19.182390,
die der Erde 1 genommen, was gegen ~~1800~~ 396 Milionen
Meilen macht. –

Siderische Revolution = 84,02 Jahre 87,87 Tage
Synodische = 369.656 Sonnentage
Mittlere Bewegung in der Bahn = ~~0.44~~ = 42."37
in 1 Sonnentage.

Neigung der Bahn gegen Ecliptik = 46' 28".44
Excentricitäte = 0,04667938 die halbe grosse Axe
als Einheit angenommen. –

Gröſste Mittelpunktsgleichung = 5° 20' 57"
Scheinbarer Durchmesser = 4".0

Durchmesser des Uranus = 7488 d. M.
Durchmesser der Uranusbahn = 800 Mill. d. M.

Mond

Durchmesser des Monds in Meilen = ~~XXX~~ 470

Mittlere Entfernung von der Erde ist = 29.982175 Mahl dem Diameter der Erde oder ~~23.000~~ 51805 Meilen beinahe. –

Siderische Revolution = 27.321661423 = 27^T 7^h 43' 11".5 Sonnentage.

Synodische = 29^T 12^h 44' 2".87 Diese Revolutionen sind aber nicht constant. –

Mittlere Bewegung in einem Sonnentage = 13° 10' 35".027

Neigung der Bahn = 5° 8' 47".9 aber diese Neigung ist nach vielen Verbesserungen unterworfen wovon eine in maximo 8' 47".15 gleich ist die vom Cosinus der Entfernung von der Sonne abhängt

Siderische Revolution der Knoten = 18.6 julianische Jahre

Synodische Revolution der Knoten = 346^T 14^h 52' 35".1

Excentricität = 0.0548442 die halbe grosse Axe = 1

Die grösste Mittelpunktsgleichung = 6° 17' 12".7

Neigung der Axe = 1° 30' 10".8

Ein Körper der auf der Erde 1 Pfund wiegt, wird er ~~auf~~ unter dem Mondsaequator nur 1/6 Pfund wiegen

Die Anzahl der Finsternisse in einem Jahre kann nicht kleiner seyn als zwei und nicht grösser als sieben. und wenn solche nur zwei sind, die müssen Sonnenfinsternisse seyn. –

Revolutionen des Mondes zusammengestellt sind

Synodische - -	29^d	12^h	$44'$	$2''.9$	= 29.53058872
Anomalistische	27	13	18	37.4	= 27.55459950
Siderische - -	27	7	43	11.5	= 27.32166142
Tropische - -	27	7	43	4.7	= 27.32158242
Nodische - - -	27	5	5	36.0	= 27.21222222

Correction die man an die beobachteten Durchgänge durch den Meridianfaden bei den Meridian-Instrumenten anbringen muss um das Moment des Durchganges zu bekommen ist folgende $m + n\,tg\,\delta + c\,sec\,\delta$ in welcher

$m = a \sin\varphi + b\cos\varphi$
$n = -a\cos\varphi + b\sin\varphi$
und a das Azimuth des Instrumentes, b Neigung der Rotationsaxe gegen Horizont, c den Collimations-Fehler des ~~[illegible]~~ Micrometers und δ die Declination des Sterns bedeutet. – Für Cracau ist

$m = 0.76676.a + 0.64194.b$
$n = -0.64194.a + 0.76676.b$

$a = \frac{(\alpha'-t') - (\alpha - t)}{n' - n}$ $n' = \frac{\sin(\varphi - \delta')}{\cos\delta'}$

Zu der Precession

Die Grösse m ist $n = \frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta}$

für 1800	= 46".04367	und log n = 1.30232
1810	= 46.04676	- - - - 1.30230
1820	- - 46.04984	- - - - 1.30228
1830	- - 46.05293	- - - - 1.30226
1840	- - 46.05601	- - - - 1.30224
1850	- - 46.05910	- - - - 1.30222

Höhenparallaxe der Sonne ist

$\frac{8''.5776}{r}\,\rho \sin(\varphi' - \delta)$ { r ist die Entfernung der Sonne von der Erde. –

oder $= aA + bB$ wo $A = \rho\sin\varphi'$; $B = \rho\cos\varphi'$

$a = \frac{8.5776}{r}\cos\delta$, $b = -\frac{8''.5776}{r}\sin\delta$

φ' ist die geocentrische Breite des Beobachtungsortes für Cracau wo $\varphi = 50°3'50$ ist $\varphi' = 49°52'59''.3$

log ρ = 9.9991594. ~~[illegible]~~ log $\rho\cos\varphi'$ = 9.8083172
log $\rho\sin\varphi'$ = 9.8826686

Precession für das Jahr 1750+t ist

in AR . . . . . $\frac{d\alpha}{dt} = m + n \tang \delta \sin \alpha$

in Declination . . $\frac{d\delta}{dt} = n \cos \alpha$

wo

$$m = 46''.02824 + t.0.000308645 0$$
$$n = 20.06442 - t.0.0000970204$$

und t ist die Anzahl der seit 1750 verflossenen Jahre — (: Nach Bessel :)

Nutatio und Aberratio

$$d\alpha = + \frac{20''.255}{15} \cos \omega \cos \alpha \sec \delta \cos \odot$$
$$+ \frac{20.255}{15} \sin \alpha \sec \delta \sin \odot$$
$$+ \frac{0.580}{15} \cos \alpha \tang \delta \cos 2\odot$$
$$+ \left(\frac{1.22 \times 15}{15} + \frac{0.532}{15} \sin \alpha \tang \delta\right) \sin 2\odot$$
$$+ \left(\frac{15.3425}{15} + \frac{6.683}{15} \sin \alpha \tang \delta\right) \sin \Omega$$
$$+ \frac{8.977}{15} \cos \alpha \tang \delta \cos \Omega$$

wo $d\alpha$ die Aberration und Nutation in AR in Zeit bezeichnet, α AR, δ Declination, ω Schiefe der Ecliptik, $\odot$ Länge der Sonne, Ω Länge des aufsteigenden Knotens. ——

Scheinbare AR = mittlere AR − $d\alpha$

$$
\begin{aligned}
dp = & -20.''255 \cos\alpha \sin\delta \sin\odot \\
& - 20.255 (\tan\omega \cos\delta - \sin\alpha \sin\delta) \cos\omega \cos\odot \\
& - 0.532 \cos\alpha \sin 2\odot \\
& + 0.580 \sin\alpha \cos 2\odot \\
& - 6.683 \cos\alpha \sin\Omega \\
& + 8.977 \sin\alpha \cos\Omega
\end{aligned}
$$

wo dp die Aberration und Nutation in der Poldistanz bedeutet, so dass

Scheinbare Poldistanz = mittlere Poldistanz − dp

Diese Formeln der Aberration und Nutation sind von Littrow gegeben

---

Um aus der AR und Declination die Länge und Breite zu finden, gelten die Formeln

$$\text{tang}\, N = \frac{\text{tang}\,\delta}{\sin\alpha}$$

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\cos(N-\omega)}{\cos N}\,\text{tang}\,\alpha$$

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}(N-\omega)\sin\lambda$$

(Prüfungsformel:) $$\frac{\cos(N-\omega)}{\cos N} = \frac{\cos\beta \sin\lambda}{\cos\delta \sin\alpha}$$

α ... AR
δ ... Declination
λ ... Länge
β ... Breite
ω .. Schiefe der Ecliptic

Die gegenseitigen Formeln sind:

$$\text{tg}\, N' = \frac{\text{tg}\,\beta}{\sin\lambda}$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\cos(N'+\omega)}{\cos N'}\,\text{tg}\,\lambda$$

$$\text{tang}\,\delta = \text{tang}(N'+\omega)\sin\alpha$$

$$\left\{ \frac{\cos(N'+\omega)}{\cos N'} = \frac{\cos\delta \sin\alpha}{\cos\beta \sin\lambda} \right.$$

Logarithmen der verschiedenen Grösse

		Logarithmen
Der Halbmesser in Bogen-Secunden	= 206264.8	5.3144251
Umkreis dessen Durchmesser = 1	= 3.1415926	0.4971499
sin 1"	= 0.00000485	4.6855749
sin 2"	= 0.00000970	4.9866049
sin 3"	= 0.00001454	5.1626961
Die Zahl deren hyperb. log. = 1 ... e	= 2.7182818	0.4342945
Modulus der brigg'schen Logarith	= 0.4342944[29]8	9.6377843
Complement desselben	= 2.3025851	0.3622157
24 Stunden in Secunden ausgedrückt	= 86400"	4.9365137
Complement derselben	= 0.00001157	5.0634863
360 Grade in Secunden	= 1296000	6.1126050

x° Réaumur $= (32^\circ + \frac{9}{4}x^\circ)$ Fahren. $= \frac{5}{4}x^\circ$ Cels.
x° Cels. $= (32^\circ + \frac{9}{5}x^\circ)$ Fahren. $= \frac{4}{5}x^\circ$ Réaum
x° Fahren. $= (x^\circ - 32^\circ)\frac{4}{9}$ Réaum $= (x^\circ - 32^\circ)\frac{5}{9}$ Cels.

Zu dem Logarith der centesimal Grade addire man 9.9542425 um zu erhalten den Logarith der sexagesimal Grade.

Zu dem Log der centes. Minuten addire man ~~den~~ ~~Lg~~ 1.7323938 um zu erhalten den Log. der sexag. Min

Zu dem Log der centesimal Secunden addire man ~~den~~ ~~Lg~~ 3.5105450 um zu erhalten den Log. der sexagesimal Secunden.

Man verfahre umgekehrt, um aus dem Sexagesimal System in das Centesimal zurück zukehren d. h. die genannten Zahlen subtrahire man von den Logari der Grade, Minuten und Secunden.

Finsternisse

Sey a die AR des Mondes
d die Declination
p die Horizontalparallaxe
m der scheinbare Halbmesser
Dieselben Grössen für die Sonne seyen α, δ, π, μ
$da, d\alpha, dd, d\delta$ ... seyen die stündlichen Aenderungen dieser Grössen
β die Breite des Mondes zur Zeit der ☍
t die Zeit der ☍

$$\sin u = \frac{\sin\beta}{\sin 5^\circ 8'}$$

$$\operatorname{tg} n = \frac{dd - d\delta}{(da - d\alpha)\cos\delta}$$

$$e = (d - \delta)\cos n$$

$$h = \frac{\sin n}{dd - d\delta}$$

so hat man für die Zeit ϑ der Mitte der Finsterniss

~~$\vartheta = \pm t(d-\delta)h \sin n$~~ $\vartheta = t \pm (d-\delta) h \sin n$

Mondsfinsternisse

Sie finden statt wenn zur Zeit der ☍ $u < 9^\circ 31'$
" nicht statt " " " $u > 12^\circ 4'$
Liegt u innerhalb dieser Grenzen, so suche man ω; ω' aus den Gleichungen

$$\cos\omega = \frac{e}{\frac{b_1}{b_0}(p+\pi-\mu)+m}$$

$$\cos\omega' = \frac{e}{\frac{b_1}{b_0}(p+\pi-\mu)-m}.$$

und es findet eine partielle Finsterniss statt

wenn $\cos\omega < 1$

es findet keine statt wenn $\cos\omega > 1$ ist;

eben so findet eine totale Finsterniss statt wenn

$\cos\omega' < 1$

keine wenn $\cos\omega' > 1$ ist.

Die Zeit des Anfangs und Ends der partiellen Finsterniss ist

$$\vartheta' = \vartheta \mp he\,tg\,\omega$$

und die Zeit des Anfangs und Ends der totalen Finsterniss

$$\vartheta'' = \vartheta \mp he\,tg\,\omega'$$

Die größte Verfinsterung ist

$$\frac{b_1}{b_0}(p+\pi-\mu)+m-e$$

Sonnenfinsternisse

Sie finden statt, wenn zur Zeit der ☌ $u < 15°24$

nicht statt - - - - - - - - - $u > 18°22$

Innerhalb dieser Grenzen erkennt man das Stattfinden derselben wie oben aus den Gleichungen

$$\cos\omega = \frac{e}{p-\pi+m+\mu}$$

$$\cos\omega' = \frac{e}{p-\pi}$$

$$\cos\omega'' = \frac{e}{p-\pi+m-\mu}$$

$$\cos\omega''' = \frac{e}{p-\pi-m+\mu}$$

So findet $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ partielle Finsterniss statt, wenn $\cos\omega \lessgtr 1$ ist;

" $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ centrale - - - - - - - - $\cos\omega' \lessgtr 1$ "

" $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ totale " " $\cos\omega'' \lessgtr 1$ "

" $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ ringförmige " " $\cos\omega''' \lessgtr 1$ "

und es ist

$\vartheta = t \pm (d-\delta)h \sin n$ die Zeit der Mitte der Finsterniss

$\vartheta \mp he\,\mathrm{tg}\,\omega$ die Zeit des Anf. u. End. d. partiellen Finsterniss,

$\vartheta \mp he\,\mathrm{tg}\,\omega'$ " " " centralen "

$\vartheta \mp he\,\mathrm{tg}\,\omega''$ " " " totalen "

$\vartheta \mp he\,\mathrm{tg}\,\omega'''$ " " " ringförmigen

die grösste Verfinsterung ist $p-\pi+m+\mu-e$

Um den Weg des Mondschattens auf der Erde zu finden sey Δ eine gegebene Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne für eine gegebene Pariser Zeit

$$y = \frac{\cos d \sin(a-\alpha)}{\sin p}$$

$$z = \frac{\sin(d-\delta) + 2\cos d \sin\delta \sin^2 \frac{a-\alpha}{2}}{\sin p \cos\delta}$$

$$tg\, n = \frac{\partial d - \partial\delta}{(\partial a - \partial\alpha)\cos\delta}$$

$$Y = y \pm \frac{\Delta}{p} \sin n$$

$$Z = z \pm \frac{\Delta \cos n}{p \cos\delta}$$

und man hat

$$\sin\varphi = Z\cos\delta + \sin\delta\sqrt{1-Y^2-Z^2}$$

$$\sin s = \frac{Y}{\cos\varphi}$$

φ ist die Breite, s der Stundenwinkel der Sonne (: wahre Zeit :) des gesuchten Ortes, welcher für die gegebene Pariser Zeit die Distanz Δ sieht.

Für Δ=0 geben diese Ausdrücke die Orte welche für eine gegebene Zeit eine centrale Finsterniss seh

Für $\Delta = \mu + m$ oder $\Delta = \mu - m$ geben sie die Orte, welche für die gegebene Zeit die äussere oder innere Berührung der Ränder sehen, und daher an der Grenze des Schattenweges liegen, den der Mond auf der Erde beschreibt. Das obere Zeichen von Y und Z gehört für die nördliche, das untere für die südliche Grenze des Schattenwegs. —

Um den Anfang und das Ende einer Sonnenfinsterniss zu berechnen dienen folgende Formeln. Seyen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Polhöhen für drei bekannten Orte und t_1, t_2, t_3 die nach strengen Formeln berechneten Zeiten des Anfanges der Sonnenfinsterniss in wahrer Sonnenzeit ausgedrückt. so ist wenn t den Anfang der Finsterniss für einen gegebenen Ort und φ seine Polhöhe bedeuten

$$t = A\lambda + B\varphi + C$$

wo λ die geographische Länge von Paris an östlich gerechnet bedeutet. Die numerischen Werthe der Coefficienten A, B, C findet man aus den drei Gleichungen

$$t_1 = A\lambda_1 + B\varphi_1 + C$$
$$t_2 = A\lambda_2 + B\varphi_2 + C$$
$$t_3 = A\lambda_3 + B\varphi_3 + C$$

in denen die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die geographischen Längen der drei bekannten Orten auch von Paris östlich gerechnet vorstellen

Für das Ende der Finsterniss verfährt man auf die nemliche Weise —

Die Länge eines elliptischen Quadranten ist

$$= \frac{b^2\pi}{4a}\left\{1 + 3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2 + 7\left(\frac{3.5.\varepsilon^2}{2.4.6}\right)^3 + \cdots\cdots\right\}$$

wo $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, a die halbe grosse und b die halbe kleine Axe der Ellipse ist (: Siehe auf der umgekehrten Seite :)

Die Oberfläche der Zone vom Aequator bis zur Breite φ ist

$$= 2b^2\pi \sin\varphi \left\{1 + \frac{2}{3}e^2 \sin\varphi^2 + \frac{3}{5}e^4 \sin\varphi^4 + \frac{4}{7}e^6 \sin\varphi^6 + \cdots\cdots\right\}$$

Für $\varphi = 90°$ ist die Oberfläche des halben Sphäroids

$$= 2b^2\pi\left\{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \cdots\cdots\right\}$$

oder $$= 2a^2\pi\left\{1 - \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3.5}e^4 - \frac{1}{5.7}e^6 - \cdots\cdots\right\}$$

wenn man $b^2 = a^2(1 - e^2)$ setzt.

Volumen der Erde

$$V = \frac{4}{3}a^2 b\pi$$

Die Abplattung des Erdsphäroids heisst der Quotient $\frac{a-b}{a}$ und aus der Untersuchung von Bessel folgt diese Abplattung $= \frac{1}{300.66} = 0.003326..$

Die verbesserte Polhöhe folgt aus der Gleichung

$tg\,\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\,tg\,\varphi$ wo φ die beobachtete und φ' die geocentrische Polhöhe, a und b die halben Axen des elliptischen Erdaequators bedeuten. – Löst man diese Gleichung nach der Formel

$tg\,\frac{1}{2}y = m\,tg\,\frac{1}{2}x$ aus welcher $\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x + \frac{m-1}{m+1}\sin x + \ldots$

in eine Reihe auf, so wird

$$\varphi' = \varphi + A \sin 2\varphi + etc$$

$$\text{wo } A = \frac{m-1}{m+1} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} = -\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

Will man die Correction $A \sin 2\varphi$ in Minuten erhalten, so muss noch mit $\sin 1'$ dividirt werden

Für die Besselsche Abplattung wäre also

$$\varphi' = \varphi - A \sin 2\varphi \quad \text{und} \quad \log A = 1.0588562$$

In No 438. der Astronomischen Nachrichten findet man

$m = 57013.^{T}109 - 286.^{T}337 \cos 2\varphi + 0.^{T}611 \cos 4\varphi + 0.^{T}001 \cos 6\varphi$

$p = 57156.^{T}285 \cos\varphi - 47.^{T}825 \cos 3\varphi + 0.^{T}060 \cos 5\varphi$

$\frac{a-b}{a} = c = \frac{1}{299.152}$ $= 0.0033427$

$\log c = 7.5241069$

oder, wenn $\sin\psi = e \sin\varphi$

$\log p = 4.7567009.0 + \log\cos\varphi - \log\cos\psi$

$\frac{\omega}{\gamma'} = 0''.06314417 + 0''.00031714 \cos 2\varphi + 0''.00000013 \cos 4\varphi$

$\frac{\omega}{\gamma''} = 0''.06293257 + 0.00010536 \cos 2\varphi - 0''.00000004 \cos 4\varphi$

$\log\frac{\omega}{\gamma'} = 8.8025099.6 + 3\log\cos\psi \;|\; \log\frac{\omega}{\gamma''} = 8.7996016.0 + \log\cos\psi$

$\lambda = 0''.06303837 + 0''.00021125 \cos 2\varphi + 0''.00000004 \cos 4\varphi$

$\lambda' = 0.06010580 + 0.00010589 \cos 2\varphi + 0.00000009 \cos 4\varphi$

$a = 3272077.^{T}14$ $\log a = 6.5148235.337$ $\log e = 8.9122052$

$b = 3261139.33$ $\log b = 6.5133693.539$ $\log\sqrt{1-e^2} = 9.9985458.702$

Aus Bessel's Abhandlung Astron. Nachricht No 333.

Länge eines Meridiangrads, dessen mittlere Polhöhe = φ:

$$m = 57011.^{T}453 - 284.^{T}851 \cos 2\varphi + 0.^{T}593 \cos 4\varphi - 0.^{T}001 \cos 6\varphi.$$

Länge eines Grads des Parallels:

$$p = 57153.^{T}885 \cos\varphi - 47.^{T}576 \cos 3\varphi + 0.^{T}059 \cos 5\varphi,$$

oder wenn $\sin\psi = e \sin\varphi$, ... /$\log e = 8.9110835$:/

so ist

$$\log. p = 4.7566845 + \log\cos\varphi - \log\cos\psi.$$

Krümmungshalbmesser im Meridiane = r', in der darauf senkrechten Richtung = r'', in dem Azimuthe $\alpha = r$,

$$\frac{\omega}{r'} = 0''.06314600 + 0''.00031552 \cos 2\varphi + 0''.00000013 \cos 4\varphi$$

$$\frac{\omega}{r''} = 0{,}06293548 + 0.00010482 \cos 2\varphi - 0.00000004 \cos 4\varphi$$

$$\log. \frac{\omega}{r'} = 8.8025112.9 + 3 \log. \cos\psi$$

$$\log. \frac{\omega}{r''} = 8.7996179.6 + \log. \cos\psi$$

und $\frac{\omega}{r} = \lambda + \lambda' \cos 2\alpha$

wo

$$\lambda = 0''.06304074 + 0''.00021017 \cos 2\varphi + 0''.00000004 \cos 4\varphi$$

$$\lambda' = 0''.00010526 + 0.00010535 \cos 2\varphi + 0.00000009 \cos 4\varphi$$

Entfernung vom Mittelpunkte der Erde = ϱ und so genannte verbesserte Breite = φ';

$$\log. \varrho \cos\varphi' = \log\cos\varphi - \log. \cos\psi \qquad 0.0029083.6 \text{ (No 438)}$$

$$\log. \varrho \sin\varphi' = \log\sin\varphi - \log\cos\psi - 0.0028933.3$$

Grosse Axe des Erdellipsoids oder $a = 3271953.^{T}854$

$\log a = 6.5148071699$. $\log b = 6.5133605073$ $b = 3261072.900$

Um das Azimuth eines Sternes zu finden, hat man folgende Gleichungen

$$tg\tfrac{1}{2}(A+q) = ctg\tfrac{1}{2}p\ \frac{\cos\frac{1}{2}(d-c)}{\cos\frac{1}{2}(d+c)}$$

$$tg\tfrac{1}{2}(A-q) = ctg\tfrac{1}{2}p\ \frac{\sin\frac{1}{2}(d-c)}{\sin\frac{1}{2}(d+c)}$$

in welchen A das Azimuth, q den Variationswinkel, d die Poldistanz des Sterns, $c = 90° - \varphi$ und $\pm p$ = Sternzeit − AR* = Mittlerezeit + Sternzeit im mittl. Mittag − AR* oder p ist nichts anders als Stundenwinkel positiv genommen wenn der Stern auf der Westseite des Meridians und negativ wenn er auf der Ostseite ist. Der erste Ausdruck wird gebraucht wenn man nach der Sternzeit beobachtet, und der zweite wenn die Uhr nach der mittlern Zeit geht. —

Wenn die Höhe eines Sterns oder seine Zenithdistanz bekannt ist, so findet man das Azimuth aus der folgenden Gleichung

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin k.\ \sin(k-d)}{\sin 2\ \sin c} \qquad k = \frac{z+d+c}{2}$$

in welcher d und c die frühere Bedeutung haben z aber ist die Zenithdistanz durch Refrac.−Parall. corrigirt.

Reduction einer ~~Hö~~ ~~Höhe~~ Länge zum Horizont

Diese Reduction ist $z = \frac{1}{2}a\theta^2 \sin^2 1''$ wo a die gemessene geneigte Länge und θ der Neigungswinkel ist; um selber die Reduction genau seyn muss θ nicht grösser als 3 oder 4 Grade seyn.

Bestimmung des Halbmessers eines Kreis-micrometers. (nach Bessel:)

Die beste und sicherste Methode zu dieser Bestimmung ist durch die Durchgänge zweier Sterne deren Declination bekannt ist.

Seyen diese Declinationen δ und δ', t und t' die Zeiten die die Sterne brauchen zur Beschreibung der Sehnen eg und ac, so hat man wenn man die Wege der Sterne als gradlinig betrachtet

$$ac = 15\,t \cos\delta = a$$
$$eg = 15\,t' \cos\delta' = a'$$

hieraus $fb = \delta' - \delta = \frac{1}{2}(4r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(4r^2 - a'^2)^{\frac{1}{2}}$

oder $$4r^2 = (\delta' - \delta)^2 + \frac{1}{2}(a^2 + a'^2) + \left(\frac{a^2 - a'^2}{4(\delta' - \delta)}\right)^2$$

und endlich

$$2r = \delta' - \delta + \frac{a^2 + a'^2}{4(\delta' - \delta)} - \frac{a^2 a'^2}{8(\delta' - \delta)^3} + \frac{(a^2 + a'^2)\,a^2 a'^2}{32(\delta' - \delta)^5} - \text{i. t. d.}$$

oder ohne merklichen Fehler

$$2r = (\delta' - \delta) + \frac{\{15 \cos\frac{1}{2}(\delta' + \delta)\}^2}{4(\delta' - \delta)}(t^2 + t'^2) - \frac{\{15 \cos\frac{1}{2}(\delta' + \delta)\}^4}{8(\delta' - \delta)^3}\, t^2 t'^2 + \ldots$$

wo die Coëfficienten der Potenzen t, t' constant sind und bei der Berechnung aller Beobachtungen gebraucht werden können. — Die erste der zwei letzten Gleichungen hat dann ~~[illegible]~~ ihren Vortheil wenn $2r - (\delta' - \delta)$ sehr klein ist, oder wenn der Unterschied der Abweichungen beider Sterne nahe dem Durchmesser des Kreismicrometers gleich ist. Die zweite der genannten Gleichungen außer der Be-

Bestimmung des Halbmessers dient noch dazu um sich zu überzeugen ob das Sehfeld Kreis-förmig ist. —

In der Gleichung $4r^2 = \ldots$ setzt man für $a^2+a'^2$, $(a+a')^2+(a-a')^2$ so erhält man

$$4r^2 = \left\{\delta''-\delta+\frac{(a+a')^2}{4(\delta''-\delta)}\right\}\left\{\delta''-\delta+\frac{(a-a')^2}{4(\delta''-\delta)}\right\}$$

Aus derselben Gleichung wenn man ein Mahl a^2-a^2 und dann $a'^2-a'^2$ addirt, bekomt man

$$4r^2 = a^2+\left\{\delta''-\delta-\frac{(a+a')(a-a')}{4(\delta''-\delta)}\right\}^2$$

und
$$4r^2 = a'^2+\left\{\delta''-\delta+\frac{(a+a')(a-a')}{4(\delta''-\delta)}\right\}^2$$

Alle die vorigen Ausdrücke werden zur Rechnung weit bequemer eingerichtet, wenn man zwei Hülfswinkel z und z' einführt so daß $\alpha = z-z'$ und $\alpha' = z+z'$, wo α und α' die Winkel sind, die die aus dem Mittelpunkte des Sehfeldes zu den Ein- oder Austritts-punkten beider Sterne gezogene Halbmesser ~~beide~~ mit dem Declinationskreis bilden, es ist nemlich

$$\delta'-\delta = r\{\cos(z+z')+\cos(z-z')\} = 2r\cos z\cos z'$$
$$ef+ab = \tfrac{1}{2}(a+a') = r\{\sin(z+z')+\sin(z-z')\} = 2r\cos z'\sin z$$
$$ef-ab = \tfrac{1}{2}(a'-a) = r\{\sin(z+z')-\sin(z-z')\} = 2r\cos z\sin z'$$

Dividirt man die beiden letzten Gleichungen durch die erste, so erhält man

$$\operatorname{tg} z = \frac{\tfrac{1}{2}(a'+a)}{\delta'-\delta}, \qquad \operatorname{tg} z' = \frac{\tfrac{1}{2}(a'-a)}{\delta'-\delta}$$

Mit diesen Hülfsgrößen hat man aus den letzten Gleichungen

$$2r = \frac{\delta - \delta'}{\cos z \cos z'}$$

$$2r = \frac{\frac{1}{2}(a' + a)}{\cos z' \sin z}$$

$$2r = \frac{\frac{1}{2}(a' - a)}{\cos z \sin z'}$$

$$2r = \frac{a}{\sin (z - z')}$$

$$2r = \frac{a'}{\sin (z + z')}$$

Aus den drei ersten Gleichungen sieht man dass die Bestimmung des Halbmessers am vortheilhaftesten seyn wird, wenn $\delta' - \delta$ sehr nahe $= r$ oder nur sehr wenig kleiner als $2r$; im ersten Falle die Fehler der Declinationen und im zweiten die der Beobachtungen haben den kleinsten Einfluss.

Die zwei letzten Ausdrücke erhält man aus aus den zwei der früheren drei Gleichungen indem man die ein Mahl addirt und dann subtrahirt.

Hat man auf diese Art den Halbmesser bestimmt so kann man sehr leicht die Position eines unbekannten Gestirnes finden wenn man etliche Eintritte und Austritte ~~mit demselben Kreismicrometer~~ ~~Beobachtet~~ eines bekannten und zu bestimmenden Sternes mit demselben Kreismicrometer beobachtet. Es ist nehmlich immer

Die AR des unbekannten Sternes gleich dem Unterschied der arithmetischen Mittel aus den Ein= und Austritten beider Sterne zu der AR des bekannten Sternes mit seinem Zeichen addirt. --- Ist z. B. AR des bekannten Sternes α und die des unbekannten α' und überdieß E und E', A und A', die Zeiten der Eintritte und Austritte beider Sterne so ist:

$$\alpha' = \alpha + \left\{\frac{A+E}{2} - \frac{A'+E'}{2}\right\}$$

Sind ferner d und d' die Abstände vom Mittelpunkte des Gesichtsfeldes in Bogensecunden ausgedrückt, südlich negativ und d als den Abstand des bekannten Sternes angenommen, so berechne man zuerst

$$\sin\alpha = \frac{15\cos\delta}{2r}$$

$$\sin\alpha' = \frac{15\cos\delta'}{2r}$$

ferner

$$d = r\cos\alpha$$

$$d' = r\cos\alpha'$$

so ist

$$\delta' = \delta + d' - d$$

Im dem Fall nun, daß die verglichenen Sterne zu nahe am Pol stehen, wird die Declination δ' durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\delta' = \delta + d' - d + \sin 1''. \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\{(d'+d)(d'-d)\}$$

Wenn der zubestimmende Stern zu schnell seine Position ändert, so müssen noch Correctionen an die oben gegebenen α' und δ' hinzukommen

welche so gefunden werden: Heisst $\Delta\alpha'$ die in Secunden ausgedrückte Aenderung der AR in einem mittleren Tage, und $\Delta\delta''$ die der Declination, so werden diese Aenderungen während einer Secunde Sternzeit $\frac{\Delta\alpha'}{86636}$ und $\frac{\Delta\delta''}{86636}$ betragen und es müssen dann die Correctionen

$$+\frac{\delta'.\Delta\delta''}{12995406.r^2\delta''} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{4}.\Delta\alpha'.a'^2}{1299540.d'}$$

mit ihren Zeichen respective an die berechnete AR und Declination angebracht werden, a' bedeutet die beschriebene Sehne, oder die Zeit vom Eintritte bis zum Austritte. —

Stellt man die Beobachtungen mit dem Kreismicrometer in geringen Höhen an, so muss man noch auf die Refraction Rücksicht nehmen. Ist t. Stundenwinkel; östlich negativ; und φ die Polhöhe, so berechne man zuerst $tg.\psi = Cos.t\ Cotg.\varphi$

dann verbessert man den Durchmesser des Kreismicrometer wegen der Refraction, diese Correction ist $= -\frac{57''\ Sin(\delta'-\delta^*)}{Sin(\psi+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta')^2}$

d. h. der wahre Durchmesser $2R$ wird seyn

$$2R = 2r - \frac{57''\ Sin(\delta'-\delta)}{Sin(\psi+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta')^2}$$

und

die verbesserte AR = unverbesserte AR ×

$$\times \frac{\alpha \sin(\delta'-\delta)\, tg\, t . \sin\psi}{\sin(\psi+\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}\delta'')^2 \cos\delta \cos\delta''}$$

$$\times \left\{ \cos(\psi+\delta+\delta'') + \cos\psi \cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta'') \right\}$$

Die verbesserte Declination = unverbesserte

$$+ \frac{\alpha \sin(\delta'-\delta)}{\sin(\psi+\tfrac{1}{2}\delta+\tfrac{1}{2}\delta'')^2} \left\{ 1 - \left(\frac{r^2}{d.d'}+1\right)\left(\frac{\cos^2\psi}{tg^2\varphi} + \cos\psi \sin\psi\, tg\tfrac{1}{2}(\delta+\delta'') \right\} \right.$$

wo für die Höhen über 12°, wenn $\delta'-\delta$ nicht gar zu gross ist, anstatt α fast stets 57" gesetzt werden kann

---

Geographische Lage von Cracow

Geographische Breite	50° 3' 50" nördl.
— Länge	1h 10 29".6 von Paris
—	26 15.6 — Berlin
—	37° 37' 24" — Fero

Geographische Lage von Warschau

Breite	52° 13' 5".06
Länge	1h 14' 45".65 von Paris
oder	18° 41' 24".75
	38 41 24.75 von Fero

~~Od ...~~ Vom Pulkowaer Meridian liegt Warschau 37' 14".32 in Zeit gegen Westen

Länge von Pulkowaer Sternwarte = 1h 51' 56".97 von Paris

= 2 1 18.67 von Greenw.

Berechnung der geographischen Längen aus Sternbedeckungen nach Bessel

Man drückt zuerst alle Beobachtungszeiten in mittleren Sonnenzeiten aus, hierauf bringt man alle mit der vorläufig bekannten Meridian Unterschiede auf mittlere Zeiten des Ortes der Ephemeriden, nimmt aus allen das Mittel T welches nur auf die nächste Viertelstunde genau zu seyn braucht. Nun suche man für die Zeiten $(T-1)^h$, T^h, und $(T+1)^h$ aus den Ephemeriden α, δ, und π für den Mond mittelst einer Interpolationsformel oder ~~mit~~ nach die Tafeln von Anger. dann bezeichne man mit A und D die AR und Declination des Fixsternes, die bekannten Polhöhen der Beobachtungsörter aber mit φ und berechne

$$r\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}},\quad r\sin\varphi' = \frac{(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin\varphi^2}}$$

Ferner rechne man für die drei Zeiten $(T-1)^h$, T^h und $(T+1)^h$ die Größen P und Q aus

$$P = \frac{\cos\delta\sin(\alpha-A)}{\sin\pi}$$

$$Q = \frac{\sin\delta\cos D - \cos\delta\sin D\cos(\alpha-A)}{\sin\pi}$$

Die Größen P und Q sind dieselben ~~u~~ welche später mit p und q bezeichnet werden, und gehören zu der Zeit T, die Veränderungen aber dieser Größen p' und q' in der Zeit T' werden so genommen, daß man die Werthe von P und Q als für Zeit T+T' geltend betrachtet und man $P = p + p'T'$; $Q = q + q'T'$ hat.

Suche man $T' = t - T \mp d$, wo t die mittlere Zeit der Beobachtung an jedem einzelnen Orte bedeutet und drückt T' in Stunden und deren Decimaltheilen aus, dann berechne man p' und q' für jeden Ort.

Zuletzt rechne man

$u = r \cos\varphi' \sin(\mu - A)$ μ Sternzeit der Beobachtung in Bogen ausgedrückt

$v = r \sin\varphi' \cos B - r \cos\varphi' \sin B \cos(\mu - A)$

$m \sin M = p - u$
$m \cos M = q - v$ $\Big\} \; tg M = \frac{p-u}{q-v}, \quad m = \frac{p-u}{\sin M} = \frac{q-v}{\cos M}$

$n \sin N = p'$
$n \cos N = q'$ $\Big\} \; tg N = \frac{p'}{q'} \quad n = \frac{p'}{\sin N} = \frac{q'}{\cos N}$

$\cos\psi = k . m \sin(M - N)$ wo $\log k = 0.5646335$

ψ muss immer zwischen $0°$ und $180°$ genommen werden wenn die Beobachtungen die Eintritte sind und zwischen $180°$ und $360°$ wenn sie Austritte sind. Endlich rechne man

$$T'' = \frac{m s \cos(M - N - \psi)}{n \cos\psi} \quad \log s = 1.7781512$$

und $\log h = 6.4637256 + \text{comp} \log . n + \text{comp.} \log \sin \pi$.
Hat man nun $t - T$ in Zeitminuten und deren Decimaltheilen ausgedrückt, so findet man die wahren Meridianunterschiede d aus der Formel

$$d = t - T + T'' + h . \varepsilon + h \operatorname{Cotg} \psi . \zeta$$

und die Verbesserungen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ aus

$$+ \sin N \cos\delta \, \Delta\alpha + \cos N \, \Delta\delta = \varepsilon$$
$$- \cos N \cos\delta \, \Delta\alpha + \sin N \, \Delta\delta = \zeta$$

oder wenn man zuerst berechnet

$$T''' = \frac{h \cos(N+\psi) \cos\delta}{\sin\psi} \text{ und } T'''' = \frac{h \sin(N+\psi)}{\sin\psi}$$

so wird

$$d = t - T + T'' - T''' \Delta\alpha + T'''' \Delta\delta$$

Gegen

Zum Kalenderwesen

Berechnungen des jüdischen Kalenders

Im jüdischen Kalender giebt es 14 verschiedene Jahresformeln oder Normalkalender, nach denen im ganzen Jahre sich die Festtage und andere damit zusammenhängende religiöse Gebräuche richten. Wir wollen diese 14 Normal Kalender auf folgende Art bezeichnen

2k, 2g, 3m, 5m, 5g, 7k, 7g für die gemeinen Jahre
2K, 2G, 3M, 5K, 5G, 7K, 7G für die Schaltjahre

In diesen Zeichen bedeuten die Zahlen die Wochentage, auf welche der Neujahrstag fällt; die Buchstaben k, g, m ein kurzes, ein grosses und ein mittleres Jahr und zwar im gemeinen Jahre von 353, 355, 354, im Schaltjahre von 383, 385 und 384 Tagen. Dies sind die beiden characteristischen Merkmale eines jeden Jahreskalenders. Nach diesen lässt sich für die ganze jüdische Kalenderberechnung, folgende allgemeine Aufgabe aufstellen.

I. Nach der jüdischen Zeitrechnung.

Bei jedem gegebenen Jahre A der jüdischen Zeitrechnung zu bestimmen, welcher von den 14 Normalkalendern in dem verlangten Jahre für einen vollkommenen Jahreskalender gelten soll.

Die Auflösung, welche also 14 verschiedene Fälle zu bestimmen hat, ist folgende: Man dividire die Zahl $(12A+7)$ durch 19 und nehme den Rest R; ist dieser $=1$, so nehme man $19+1=R$. Man suche dann den Werth von

$$0{,}178117458\,A + 0{,}2220345\,R + 0{,}812684$$

und setze in der gefundenen Summe die Ganzen ~~un~~ unberücksichtigt, den Decimalbruch $= T$.

Das gesuchte Jahr A ist ein Schaltjahr, wenn $R < 9$ ge-

gefunden wird; sonst aber immer ein gemeines Jahr. Der Kalender des Jahres A aber wird vermittels des gefundenen Werthes von T auf folgende Weise bestimmt. Er ist nemlich

Beim Schaltjahre		Beim gemeinen Jahre	
=2K wenn T=70		=2K wenn T=70.	
2G ----	0'157468	2g ----	0'090410
3M ----	0'285714	3m ----	0'285714
5K ----	0'428571	5m ----	0'376124
5G ----	0'533570	5g ----	0'661838
7K ----	0'714285	7K ----	0'714285
7G ----	0'871753	7g ----	0'804695

Ist im gemeinen Jahre der Werth von R 7 13 bis 15 incl. so ändere man die Grenze bei 3M und setze dieselbe =0'271103; ist R 7 15, so ändere man außerdem noch die Grenze bei 7g und setze an dessen Stelle =0'752248

z. B. für das Jahr 5604 der jüdischen Zeitrechnung findet man R=14 T=0'0914. Das Jahr ist also ein gemeines Jahr und sein Kalender =2g d.h. es fängt am Montag an und seine Länge = 355 Tage.

II. Nach der christlichen Zeitrechnung.

Bei jedem gegebenen Jahre A der christlichen Zeitrechnung zu finden, mit welchem Tage des christlichen Datums der jüdische Neujahrstag beginnt und welcher und welcher der 14 Normal Kalender im ganzen Laufe dieses Jahres gebraucht werden soll.

Man dividire die Zahl 12A+5 durch 19 und nenne den Rest R, so dass man, wenn sich R=1 findet, R=1+19 nimt. Ferner dividire man A durch 4 und nenne den Rest r. Dann suche man die Zahl

25'98711+1'5542418R+0'25r−0'003177794A

und nenne den Ausdruck S+s so dass S die ganze Zahl

und s den Decimalbruch dieses Ausdrucks bezeichnen.
Endlich dividire man noch die Größe $S+3A+5r$ durch 7 und nenne den Rest T.
Das gesuchte Jahr ist ein Schaltjahr, wenn $R<9$, ein gemeines aber wenn $R \geqq 9$ ist. Der Kalender des gesuchten Jahres ist:

Im Schaltjahre		Im gemeinen Jahre	
= 2K wenn $T+s \geqq$	0	= 2K wenn $T+s \geqq$	0
2G ———	1·10227	2g ———	0·63287
3M ———	2·0	3m ———	2·0
5K ———	3·0	5m ———	2·63287
5G ———	3·73514	5g ———	4·63287
7K ———	5·0	7K ———	5·0
7G ———	6·10227	7g ———	5·63287

Ist bei dem gemeinen Jahre $R>13$ bis 15 incl. so ändere man bei dem Obigen die Grenze von 3M und setze dieselbe = 1·89772. Ist aber $R>15$, so ändere man noch die Grenze von 7g und setze dieselbe = 5·26574.
Hat man den Kalender des gesuchten Jahres gefunden, und dessen Zahl sei z. B. = d, so beginnt dann der gesuchte Neujahrstag am $(S+d-T)$ten August alten Styls, oder wenn diese Größe größer als 31 ist, am $(S+d-T-31)$ten September. —
Exempel Man suche den jüdischen Kalender für das Jahr 1847. Hier ist $R=5$, $r=3$, $T=5$, $S+s=28·65893$. Das gesuchte Jahr ist ein Schaltjahr weil $R<9$. Da aber $T+s>5$, also der Kalender des laufenden Jahres = 7K und $d=7$ ist, so trifft der Neujahrstag auf den $28+7-5=30$sten August alten Styls, oder 11ten Septb. n. S. Das jüdische Jahr beginnt demnach am Sonnabend den 11. Septb. ist ein kurzes Schaltjahr von 383 Tagen. —

Dla Krakowa

Wysokość bieguna $= 50° \; 3' \; 50''$

Środoziemska . . . $= 49 \; 52 \; 29'72$

log. odległości od środka ziemi $= 9'9991486$

log. Normalnej aż do osi [illegible] $= 0'0008538$

Długość 1° południka $= 57062'899$ paris. Toise

— prostop. do południka $= 57220'897$ —

— 1° Równoleżnika $= 36731'989$ —

Długość łuku od równika do Krakowa

$= 2846216'323$ par. Toise

od równika do bieguna $= 5131179'871$ Toise

Mimośród $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{(a+b)(a-b)}$

Okrąg ellip. ziemskiego południka

$$= \frac{2b^2\pi}{a}\left\{1+3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+5\left(\frac{3\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\frac{3.5\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2+\dots\right\}$$

Wielkość czyli długość 1° szerokości pod szer. g. φ . . . $= \frac{a\pi(1-\varepsilon^2)}{180(1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$

Długość 1° dług. geogr. pod szer. φ . . . . . . $= \frac{a\pi \cos\varphi}{180\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin\varphi^2}}$

Długość łuku południka od równika do szer. geogr. φ

$$= \left\{1+3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+5\left(\frac{3\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\frac{3.5\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2+\dots\right\}\frac{b^2\pi\varphi^\circ}{180^\circ . a}$$

$$-\left\{3\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+5\left(\frac{3\varepsilon^2}{2.4}\right)^2+7\left(\frac{3.5\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2+\dots\right\}\frac{b^2 \sin\varphi \cos\varphi}{a}$$

$$-\frac{2}{3}\left\{5\left(\frac{3.\varepsilon^2}{2.4}\right)+7\left(\frac{3.5.\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2+\dots\right\}\frac{b^2 \sin\varphi^3 \cos\varphi}{a}$$

$$-\frac{2.4}{3.5}\left\{7\left(\frac{3.5\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2+\dots\right\}\frac{b^2 \sin\varphi^5 \cos\varphi}{a}$$

— i t. d.

Powierzchnia pasa między równikiem i równoleżnikiem w szerokości geogr. φ

$$= 2b^2\pi \sin\varphi\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon^2 \sin\varphi^2+\frac{3}{5}\varepsilon^4 \sin\varphi^4+\frac{4}{7}\varepsilon^6 \sin\varphi^6+\dots\right)$$

Powierzchnia Ziemi $= 4b^2\pi\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon^2+\frac{3}{5}\varepsilon^4+\frac{4}{7}\varepsilon^6+\dots\right)$

Objętość Ziemi $= \frac{4}{3}a^2 b\pi$

Massa wody objętości równej ziemi waży
1936494 0000 bilijonów Cetn. wiedeńskich
według doświadczeń Maskelina i Cavendischa -
gęstość ziemi : gęst. wody = 9:2
zatem ziemia waży
8714223 0000 bilionów Cetnar. wiedeńskich

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}, \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$$

Dla łatwiejszego obrachowania e rozwiniemy przez ciąg lub przy pomocy szeregów logarytmów, więc możemy równaniem

$$e^2 = \frac{2D}{\sin\psi^2 \sin u^2} + \frac{D^2}{\sin\psi^2 \sin u^2} + \frac{4D^3}{3\sin\varphi^2 \sin\psi^2} + \dots$$

gdzie $D = \frac{G-g}{3G}$ a $\cos u = \sqrt[3]{\frac{g}{G}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$ zaś G i g oznaczają długości dwóch stopni pod szerokościami ψ i φ mierzonych. Obrachowawszy e^2, spłaszczenie będzie

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2.4}e^4 + \frac{1.3}{2.4.6}e^6 + \dots$$

Cechą /: characteristica :/ układu czyli systematu słonecznego nazywają różnicę zachodzącą między jednym a drugim systematem. Cecha ta zależy na stosunku pierwiastków kwadratowych z mas ciał głównych każdego systematu. Jeżeli bowiem f wyraża powierzchnię wycinka w czasie t przez promień wodzący opisanego a p parameter drogi planety, tedy według 2go prawa Keplera jest $\frac{f}{t} = \mu\sqrt{p}$, gdzie μ jest stałym dla każdej planety do jednegoż systematu należącej co się tak dowodzi. Niech F oznacza powierzchnię całej elipsy przez promień wodzący w czasie T opisaną, tedy również być musi $\frac{F}{T} = \mu\sqrt{p}$. Ale $F = 2\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, zaś $p = a(1-e^2)$ /: a połowa osi większej, e mimośród :/, a dlatego $\mu = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T}$. Według trzeciego prawa Keplera jest $a^{\frac{3}{2}} : T$ ilością stałą dla wszystkich planet, zatem i μ musi być ilością stałą. To więc μ jest cechą każdego systematu.
Przykład Dla ziemi a=1 T=365'256384 stąd się znajdzie μ=0'0172021 a to jest cechą dla wszystkich innych planet naszego systematu słonecznego. — Dla Księżyca T=27'321661 a=0'00250798 /: jednostka czasu i połowy osi większej, jak wprzód :/ stąd μ=0'00002888. — Dla księżyców Jowisza znajdziemy podobnie μ=0'000526 (Patrz na odwrotnej stronie pod (+))

Elementa drogi jakiejkolwiek planety

a połowa osi większej drogi planety
e mimośród uważając $a = 1$
φ kąt mimośrodowy
ε bezwzględny mimośród
b połowa osi mniejszej
p parameter
μ średni gwiazdowy ruch planety
T czas obiegu słońca gwiazdowy w średnich dniach słonecznych wyrażony
T' tenże czas w latach juliańskich
v anomalia prawdziwa
r promień wodzący planety
P odległość przysłoneczna (perihelium)
A —— odsłoneczna (aphelium)
u argument szerokości
☊ długość wschodzącego się węzła
π długość punktu przysłonecznego

tedy

$$a = \frac{p}{\cos\varphi^2} = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = a\cos\varphi = \frac{p}{\cos\varphi}$$

$$a = \frac{\varepsilon}{e}, \quad a^3 = \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2 \text{ gdzie } \log k' = 3{\cdot}5500066$$

$$\varepsilon = ae = a\sin\varphi = \sqrt{a^2-b^2}; \quad e = \frac{\varepsilon}{a} = \sin\varphi$$

$$\mu = \frac{k'^2}{a^3}, \quad p = a(1-e^2) = a\cos\varphi^2 = r(1+e\cos v).$$

$$p = \frac{A \times P}{a}, \quad P = a(1-e); \quad A = a(1+e)$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}, \quad v = u + ☊ - \pi$$

$$\log T = 6{\cdot}1126050 - \log\mu; \quad \log T' = 3{\cdot}5500148 - \log\mu$$

$$\log\mu = 6{\cdot}1126050 - \log T = 3{\cdot}5500148 - \log T'$$

Średnia odległość słońca od ziemi według Enckego
= 20682329 mil geogr.

(*) Jeżeli μ, T, m, M wyrażają ruch, czas obiegu, masę planety, masę głównego ciała około którego ciało tamte krąży, dla jednego, zaś μ', T'', m', M' dla innego systematu, tedy według Mechaniki niebieskiej jest
$M+m : M'+m' = \frac{4\pi^2 a^2}{T'^2} : \frac{4\pi^2 a'^2}{T''^2}$ zatem także $M+m : M'+m' = \mu^2 : \mu'^2$.
Ale m i m' opuścić można, bo w porównaniu z M i M' są bardzo małe, zatem
$\mu : \mu' = \sqrt{M} : \sqrt{M'}$ t.j. ruchy dwóch różnych systematów mają się do siebie w stosunku pierwiastków kwadratowych z mas ciał głównych.

Rozwiązanie zadania Keplera t.j. ze zrównania

$$a = x - e \sin x$$

znaleźć x

Przypadek 1. Jeśli $a < 180$, wtedy potrzeba obrachować posiłkowe ilości d, φ i φ' z następujących wzorów

$d = \frac{\alpha}{e} - 1$, $tg\,\varphi = \frac{\beta}{d}\sqrt{\frac{a}{e}}$, $x' = 90\, d\, tg\,\varphi$ a otrzymamy

$$x = x' + \frac{a - x' + \gamma e \sin x'}{1 - e \cos x'}$$

Przypadek 2. Jeśli $a > 180°$, obrachować potrzeba

$d = \frac{\alpha}{e} + 1$, $\sin\varphi = \frac{\beta}{d}\sqrt{\frac{a-180}{e}}$, $x' = 180 + 180\, d \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2$

a wtedy $x = x' + \frac{a - x' + \gamma e \sin x'}{1 - e \cos x'}$

$\log \alpha = 9 \cdot 9064067$
$\log \beta = 9 \cdot 1265971$
$\log \gamma = 1 \cdot 7581226$

$\log 90 = 1 \cdot 9542425$
$\log 180 = 2 \cdot 2552725$

Chyżość planety w punkcie przysłonecznym $= \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}$, w punkcie zaś odsłonecznym $= \sqrt{\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}}$ gdzie $\mu = 16 \cdot 84293$, e mimośród, a połowa osi większej. Np. dla ziemi położywszy $a = 1$ $e = 0 \cdot 01678$, znajdzie się $4 \cdot 173$ i $4 \cdot 036$ t.j. największą i najmniejszą chyżość w milach geograf. na jedną sekundę czasu średniego.

Dla Komety z r. 1680 znalazł Bessel $a = 426 \cdot 774$ promieni drogi ziemskiej, zaś $e = 0 \cdot 9999854$ w częściach a, z temi więc ważnościami znajdzie się chyżość największa $= 73 \cdot 577$ mil geogr. a najmniejsza $= 0 \cdot 000636$ 〃 $= 12\tfrac{1}{5}$ stop.

Aby znaleźć spłaszczenie ziemi t. j. stosunek $\frac{a-b}{a}$ z obserwacyi pendułu, niech będzie x = długości pen-dułu pod równikiem, y = jej przybytkowi czyli jej zwiększeniu się pod biegunami; niech dalej l i l_1 będą długości pendułu mierzonego czyli obserwowane pod szerokościami geograficz. φ i ψ, tedy

$$y = \frac{l_1 - l}{\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)}$$

$$x = l - y \sin\varphi^2 = l_1 - y \sin\psi^2$$

a potém

$$\frac{a-b}{a} = \frac{y}{x}$$

Wypadek ten jest prawdziwy przypuszczając że wszyst. kie warstwy ziemi mają też samą gęstość j. Dichtigkeit. Clairaut utrzymywał, co się też z pomiarów dosyć dowodnie potwierdziło, że przybytek ciężkości pod biegunami jest $= 2\frac{1}{2}$ razy stosunkowi siły odśrodkowej pod równikiem do siły ciężkości. Przy tem przy. puszcza Clairaut że ellipsoid wirujący obrotowo on składa się z warstw których gęstości postępujące ku środkowi nie równo wzrastają, ale jednak we wszystkich swych częściach równoważą się w swym ruchu. Jeżeli więc oznaczymy ten stosunek przez k t. j. stosunek siły odśrodkowej do ciężkości pod równikiem, przez e mimośród ziemi ellipsoidalnej, tedy według Clairauta mamy

$$e = 2{,}5k - \frac{y}{x}$$

a potém

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2.4}e^4 + \frac{1.3}{2.4.6}e^6 + \dots$$

Unferdinger podał wzór do rachowania długości pendułu sekundowego pod szerokością geog. φ

$$\log. l = 2{,}6427568 + 7{,}35147 \sin\varphi^2 + 5{,}3202 \sin\varphi^4$$

gdzie liczby wszystkie są logarytmami.

Długość pendułu otrzymuje się w liniach paryz.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Seyen $x, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ die durch Beobachtungen unmittelbar erhaltenen Größen z. B. die Polhöhen des Beobachtungsortes, und N die Anzahl dieser Beobachtungen. Sind diese Beobachtungen alle von gleichem Werthe, so daß man in Beziehung auf ihre Genauigkeit keinen Unterschied unter ihnen machen kann, so ist der wahrscheinlichste Werth dieser Größen, den wir durch X bezeichnen wollen gleich dem arithmetischen Mittel derselben, oder es ist

$$X = \frac{x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{N}$$

oder wenn man der Kürze wegen $\Sigma x = x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ setzt, so ist

$$X = \frac{\Sigma x}{N}$$

Es sey nun ε der Unterschied zwischen diesem wahrscheinlichsten Werthe X unserer Größe und dem unmittelbaren Resultate x der ersten Beobachtung, oder es sey

$\varepsilon = X - x$ und eben so
$\varepsilon_1 = X - x_1$ für die zweite
$\varepsilon_2 = X - x_2$ für die dritte
u. s. f.

Man kann diese Größen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ als die Fehler der einzelnen Beobachtungen ansehen. Bezeichnet man wieder der Kürze wegen die Summe der Quadrate $\varepsilon^2, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2 \ldots$ durch $\Sigma\varepsilon^2$, so daß $\Sigma\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots$ ist so heißt die Größe

$$P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2}$$

das Gewicht jener Bestimmung von X als des wahrscheinlichsten Werthes von x. Man sieht, daß

dieses Gewicht desto grösser seyn wird, je grösser die Anzahl N der Beobachtungen und je kleiner die Grössen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$ d. h. je genauer diese Beobachtungen selbst sind.

Nennt man dann Φ den mittleren zu befürchtenden Fehler, den man bei der Bestimmung der Grösse X begangen haben mag, so ist

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{\pi P}} = \frac{0.282095}{\sqrt{P}}$$

wo $\pi = 3.1415926$. Dieser mittlere zu befürchtende Fehler Φ ist die Summe der Producte jedes Fehlers der einzelnen Beobachtung in seine Warscheinlichkeit. Von diesem mittleren zu befürchtenden Fehler unterscheidet sich der wahrscheinliche Fehler F, den man bei dieser Bestimmung von X begangen haben kann. Dieser Fehler F ist nämlich derjenige, von dem es gleich wahrscheinlich ist, dass man ihn begangen oder dass man ihn auch nicht begangen habe. Dieser wahrscheinliche Fehler ist

$$F = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}}$$

(Die beiden Fehler Φ und F beziehen sich auf das Resultat X welches man aus den einzelnen Beobachtungen $x, x_1, x_2, \ldots$ abgeleitet hat. Nennt man nun eben so f den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen dieser Beobachtungen, so ist

$$f = 0.4769363\sqrt{\frac{N}{P}},$$

und die wahrscheinliche Gränze dieses Fehlers ist

$$f \pm \Delta f = f\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right),$$

wo in allen diesen Ausdrücken, wegen dem Wurzelzeichen die dasselbe enthaltende Grösse, immer mit dem doppelten Zeichen $\pm$ verstanden wird. Der letzte Ausdruck sagt daher, dass der wahre, wirklich statthabende Werth von f zwischen die Gränzen

$$f\left(1 + \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right) \text{ und } f\left(1 - \frac{0.4769363}{\sqrt{N}}\right)$$

fallen wird, oder dass man 1 gegen 1 wetten kann, dass der wahre Werth von f zwischen diese beiden Grössen fallen wird. —

Um die Wahrscheinlichkeit zu finden dass eine der bisher bestimmten Grössen z. B. Φ zwischen zwei willkührliche Gränzen falle, so sey sie w; die Wahrscheinlichkeit dass Φ zwischen den Gränzen $\pm \frac{r}{\sqrt{P}}$ liege, wo r eine willkührliche Grösse, und $P = \frac{N^2}{2\Sigma\varepsilon^2}$ ist,

und daher $w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-r^2} dr$ wo $e = 2.7182818$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist und das Integral von $r=0$ bis $r=r$ genomen wird. Aber wenn $r<1$ ist, hat man

$$\int e^{-r^2} dr = r - \frac{r^3}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{r^5}{5} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{r^7}{7} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{r^9}{9} - \dots$$

oder

$$\int e^{-r^2} dr = \frac{r}{e^{r^2}} \left\{1 + \frac{2r^2}{1.3} + \frac{(2r^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2r^2)^3}{1.3.5.7} + \dots \right\}$$

und wenn $r > 1$ ist, so findet man

$$\int e^{-r^2}dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{2r.e^{r^2}}\left\{1 - \frac{1}{2r^2} + \frac{1.3}{(2r^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2r^2)^3} + \frac{1.3.5.7}{(2r^2)^4} - \dots\right\}$$

z B. für $r = 0.4769363$ ist $w = 0.5$

$r = 1.00$ — — — $w = 0.8427008$

$r = 2.7510654$ — — — $w = 0.9999$

$r = \infty$ — — — — — $w = 1$

Wir haben bisher die einzelnen Beobachtungen ohne Unterschied von gleichem Werthe vorausgesetzt. Es seyen nun $c, c_1, c_2, c_3 \dots$ die respectiven Gewichter von jeder Beobachtung oder jeder Bestimmung, so hat man für den wahrscheinlichsten Werth des Resultates

$$X = \frac{c^2x + c_1^2x_1 + c_2^2x_2 + c_3^2x_3 + c_4^2x_4 + \dots}{c^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots} = \frac{\sum c^2x}{\sum c^2}$$

Die Genauigkeit des Resultates oder des Werthes X ist $G = \sqrt{\sum c^2}$

Das Gewicht $P = \frac{N}{2} \cdot \frac{\sum c^2}{\sum c^2 \varepsilon^2}$ wo $\varepsilon = X - x$ i. s. w.

Der mittlere zu befürchtende Fehler

$$\Phi = \frac{0.282095}{\sqrt{P}}$$

Der wahrscheinlichste Fehler

$$F = \frac{0.4769363}{\sqrt{P}}$$

Der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung deren Genauigkeit als Einheit genommen wird

$$f = 0.47694\sqrt{\frac{\sum c^2}{P}}$$

Endlich der wahrscheinliche Fehler der ersten Beobachtung ist ~~$\frac{f}{c}$ der zweiten $\frac{f}{c_1}$ der dritten $\frac{f}{c_2}$ u. s. w.~~ $\frac{f}{c}$, der zweiten $\frac{f}{c_1}$, der dritten $\frac{f}{c_2}$ u. s. w.

Die Gränzen von f sind

$$f \pm \Delta f = f\left(1 \pm \frac{0.47694}{\sqrt{\Sigma c^2}}\right)$$

Es werde nun durch eine Anzahl von Beobachtungen irgend eine Größe gesucht, deren Werth man schon beinahe kennt d. h. für welche man schon einen genäherten analytischen Ausdruck hat, man soll diesen Ausdruck durch Hülfe jener Beobachtungen genauer bestimmen. Nehmen wir sogleich ein Beispiel. Die Secundenpendellänge A für die geographische Breite φ werde durch den Ausdruck

$$A = 439.23 + 2.39 \sin^2 \varphi$$

in Pariser Linien gegeben; in welchem aber die beiden constanten Größen 439.23 u. 2.39 noch nicht als ganz genau angesehen werden und daher einer Verbesserung bedürfen. – Seyen diese zu suchenden verbesserten Werthe $439.23 + x$, und $2.39 + y$.

Hat man nun unter der Breite φ diese Pendellänge durch unmittelbare Beobachtung gleich B gefunden, und nimmt man an, daß auch diese Beobachtung nicht ganz richtig ist und das der wahre noch unbekannte Werth dieses Resultates gleich $B + \varepsilon$ ist,

wo also ε den Fehler der Beobachtung bezeichnet, so hat man, da sowohl $B+\varepsilon$ als auch

$$439.23 + x + (2.39 + y)\sin^2\varphi$$

den wahren Ausdruck der Pendellänge vorstellt,

$$B+\varepsilon = 439.23 + x + (2.39 + y)\sin^2\varphi$$

und wenn man davon die vorhergehende Gleichung abzieht

$$B - A + \varepsilon = x + y\sin^2\varphi$$

oder wenn man $B - A = \delta$ setzt

$$\varepsilon = x + y\sin^2\varphi - \delta$$

welches ~~also~~ daher die Bedingungsgleichung dieser Beobachtung ist. Wir wollen diese Gleichung so darstellen

$$\varepsilon = ax + by - \delta$$

Eine zweite Beobachtung gibt ebenso

$$\varepsilon_1 = a_1 x + b_1 y - \delta_1$$

eine dritte $\varepsilon_2 = a_2 x + b_2 y - \delta_2$ u. s. w.

und es wird nun darum zu thun seyn, diejenigen Werthe von x und y zu finden, welche allen diesen Gleichungen am besten entsprechen. Diese Werthe von x und y werden aber diejenigen seyn, für welche die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler $\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots = \Sigma\varepsilon^2$ ein Minimum ist, oder für welche $d.\Sigma\varepsilon^2 = 0$

Da aber die Grossen x und y im Allgemeinen von einander unabhängig sind, so ist die letzte Gleichung folgenden beiden gleich geltend

$$\left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dx}\right)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d.\Sigma\varepsilon}{dy}\right)^2 = 0$$

Die erste dieser Gleichungen gibt

$$\left.\begin{aligned} &x\Sigma a^2 + y\Sigma ab - \Sigma a\delta = 0 \\ &\text{Die zweite} \\ &y\Sigma b^2 + x\Sigma ab - \Sigma b\delta = 0 \end{aligned}\right\} \text{---} (I)$$

Durch die Elimination geben diese zwei letzten Gleichungen die wahrscheinlichsten Werthe von x und y die wir X und Y nennen wollen

$$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma ab \Sigma b\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2} \quad \text{und}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma ab \Sigma a\delta}{\Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2}$$

oder $$X = \frac{\Sigma b^2 \Sigma a\delta - \Sigma ab \Sigma b\delta}{K}$$

$$Y = \frac{\Sigma a^2 \Sigma b\delta - \Sigma ab \Sigma a\delta}{K}$$

indem man $K = \Sigma a^2 \Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2$ setzt.

Kennt man aber diese wahrscheinlichsten Werthe X und Y der beiden Größen x und y, so findet man die Gewichte P_x und P_y dieser Bestimmungen der Resultate von X und Y, so wie die wahrscheinlichsten Fehler F_x und F_y dieser beiden Größen durch folgende, den bereits vorhin gegebenen analoge Ausdrücke

$$P_x = \frac{N}{2} \cdot \frac{K}{\Sigma b^2 \Sigma \varepsilon^2}, \quad P_y = \frac{N}{2} \cdot \frac{K}{\Sigma a^2 \Sigma \varepsilon^2}$$

wo $\varepsilon = aX + bY - \delta$, $\varepsilon_1 = a_1X + b_1Y - \delta_1$ u. s. w.

oder ~~ist~~ ε ist der Werth von $ax + by - \delta$, wenn man für x und y die oben gefundenen wahrscheinlichsten Werthe X und Y hier setzt.

$$F_x = \frac{0.47694}{\sqrt{P_x^*}}, \quad F_y = \frac{0.47694}{\sqrt{P_y^*}}$$

eben so sind die mittleren zu befürchtenden Fehler

$$\Phi_x = \frac{0.28209}{\sqrt{P_x^*}}, \quad \Phi_y = \frac{0.28209}{\sqrt{P_y^*}}.$$

Um die Genauigkeit oder die Präcision G_x und G_y dieses Resultates zu finden, dann die wahrscheinlichen Fehler f der einzelnen Beobachtung und endlich die Gränzen dieser Fehler $f + \Delta f$ zu finden, drücken wir die beiden Gleichungen (II) so aus

$$\xi = -\Sigma a\delta + x\Sigma a^2 + y\Sigma ab$$
$$\upsilon = -\Sigma b\delta + y\Sigma b^2 + x\Sigma ab$$

durch die Methode der Elimination leitet man andere Gleichungen aus diesen, welche x und y durch ξ und υ geben, diese werde folgende Form haben

$$x = L + A\xi + B\upsilon$$
$$y = L' + A'\xi + B'\upsilon,$$

so sind $x = L$ und $y = L'$ die wahrscheinlichsten Werthe dieser Grossen oder es ist $X = L$ und $Y = L'$ übereinstimmend mit Vorigem da dann $\xi = \upsilon = 0$ gesetzt wird. Die Genauigkeit dieser Bestimmung von X und Y, wenn man die Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen zur Einheit annimmt, ist

$$G_x = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad G_y = \frac{1}{\sqrt{B'}}$$

Endlich ist der wahrscheinlichste Fehler f jeder einzelnen Beobachtung

$$f = F_x \cdot G_x = F_y \cdot G_y$$

Sind die einzelnen Beobachtungen von ungleicher Güte, und ist z.B. $c, c_1, c_2 \ldots$ der Werth der ersten, zweiten u.s.w. so wird man die gegebenen Bedingungsgleichungen ausser dem ε durch die Grössen $c, c_1, c_2 \ldots$ multipliciren und dann mit ihnen, wie zuvor, verfahren. —

Höhenmessen mit dem Barometer

Tafel I. Argument: Summe der Temperaturen des freien Réaumurschen Thermometer.

t+t'	A	t+t'	A	t+t'	A	t+t'	A
−10°	4.25337	+5°	4.26980	+20°	4.28564	+35°	4.30092
9	448	6	4.27087	21	667	36	192
8	560	7	195	22	770	37	291
7	671	8	301	23	874	38	391
6	781	9	408	24	976	39	490
5	892	10	514	25	4.29079	40	589
4	4.26002	11	620	26	181	41	688
3	111	12	726	27	283	42	787
2	220	13	832	28	385	43	885
−1	330	14	937	29	487	44	984
0	439	16	4.28042	30	588	45	4.31082
+1	548	16	147	31	689	46	179
2	657	17	251	32	790	47	277
3	765	18	356	33	891	48	374
4	872	19	460	34	991	49	471
+5	980	+20	564	+35	4.30092	+50	568

Tafel II. Argument: Breite des Ortes.

φ	Corr.	φ	φ	Corr.	φ	φ	Corr.	φ
0°	+ 124 −	90	15	+ 107 −	75°	30°	+ 62 −	60°
1	123	89	16	105	74	31	58	59
2	123	88	17	102	73	32	54	58
3	123	87	18	100	72	33	50	57
4	122	86	19	97	71	34	46	56
5	122	85	20	95	70	35	42	65
6	121	84	21	92	69	36	38	54
7	120	83	22	89	68	37	34	53
8	119	82	23	86	67	38	30	52
9	118	81	24	83	66	39	26	51
10	116	80	25	79	65	40	21	50
11	115	79	26	76	64	41	17	49
12	113	78	27	73	63	42	13	48
13	111	77	28	69	62	43	9	47
14	109	76	29	65	61	44	4	46
15	+ 107 −	75	30	+ 62 −	60	45	+ 0 −	45

Tafel III. Argument: v							
v	Corr.	v	Corr.	v	Corr.	v	Corr.
1.9	+ 1	2.7	+ 3	3.2	+ 11	3.7	+ 34
2.3	1	2.8	4	3.3	14	3.8	43
2.4	2	2.9	5	3.4	17	3.9	54
2.5	2	3.0	7	3.5	22		
2.6	+ 3	3.1	+ 9	3.6	+ 27		

Gebrauch der Tafeln

Es sey t und t' Temperatur der Luft der unteren und oberen Station nach Réaumur, T und T' die Temperatur des Quecksilbers nach Réaumur; b und b' Barometerhöhe der untern und obern Station (: in beliebigem Maße.

Man setze $(\log b - 10T) - (\log b' - 10T') = u$ (: $10T$ und $10T'$ als Einheiten der 5ten Decimale betrachtet; z. B. $T = +15°.4$, so wird der $\log b$ mit 154 Einheiten in den letzten Stellen verbessert :) ferner $\log u + A +$ corr. aus der II Tafel $= v$; so ist v, corrigirt durch die III Tafel, Logarithmus der Erhöhung der oberen Station über der unteren in Metern ausgedrückt, und vermehrt durch 9.71018, wird sie in Toisen seyn.

Beispiel $t = 15°.3$, $T = 14°.9$, $b = 735.581$ mm.
$t' = 3.2$, $T' = 7.8$, $b' = 537.103$ $\varphi = 45°$

$\log b = 2.86663$ corr. -149
$\log b' = 2.73014$ .. .. -78
0.13649 -71
$u = 0.13578$

$\log u = 9.13284$
$A = 4.28407$
corr 0
$v = 3.41691 +$ corr. $18 = 3.41709 =$
$= \log 2612.7$ Meter

Wzór Laplace'a do mierzenia wysokości za pomocą Barometru t.j. wzór

$$z = 18393^m (\log H - \log h)\left\{1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right\}$$

przerobił Babinet dla wysokości mniejszych niż 1000 metr. a nawet i dla większych gdzie nie potrzebujemy wypadków dokładnych ale tylko przybliżonych, na następujący

$$z = 16000^m \cdot \frac{H-h}{H+h}\left\{1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right\}$$

w którym obejść się można bez logarytmów.

Comptes rendus Tom XXX p. 309.

l'an 1850

H i T na niższej stacyi wysokość barometru i temperatura
h i t na wyższej

Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung

Eine Erscheinung, deren mannigfache Abwechselungen nach einer bestimmten Zeit wiederkehren, nennt man eine periodische Erscheinung, wie z.B. in der Astronomie die Elemente einer Planetenbahn, die Längen oder Rectascensionen eines Planeten, in der Meteorologie der jährliche oder tägliche Gang der mittlern Temperatur und des mittlern Luftdrucks, in der Physik die Declination der Magnetnadel, in der Statistik die in gewissen Zeiträumen vorfallenden Geburts- und Sterbefälle u.s.w. sind.

Wenn nun die periodische Erscheinung nach dem Ablaufe k ihrer Periode stets wiederkehrt, und dabei immer von der veränderlichen Größe y abhängig bleibt, so kann die Eigenschaft, daß y stets sich gleich bleibe, wenn auch x um k, $2k$, $3k$, u.s.w. vermehrt oder vermindert wird durch die Gleichung

$$y_x = p_0 + u_1 \sin\left(U_1 + \frac{2\pi}{k} x\right) + u_2 \sin\left(U_2 + \frac{2\pi}{k} 2x\right) + \ldots$$

in welcher $2\pi = 360^\circ$ ist, und p_0, u_1, $u_2 \ldots U_1$, $U_2 \ldots$ Constanten bezeichnen, vollständig ausgedrückt werden. Kann man also, sagt Bessel, diese Constanten aus einer Beobachtungs- oder Zählungsreihe bestimmen, so erhält man hierdurch die mathematische Theorie der Erscheinung entwickelt. Soll sie den Beobachtungen entsprechend gewählt werden, so muss dieß auf eine solche Art geschehen, daß sie die aus den Beobachtungen hergeleitete Entwickelung, die in der That nichts anders als das Resultat der Beobachtungen in der concisesten Form ist, vollständig ergiebt.

Wenn die empirisch gefundenen Werthe von y, auf welche man die Entwickelung gründen will, zu in arithmetischer Reihe fortschreitenden und die ganze Periode ausfüllenden Werthen von x gehören, so ist die Bestimmung der Constanten am einfachsten und leichtesten. Sie beruht in Folgendem

Für die Praxis kann man der ~~obigen~~ Gleichung die Form

$$y_x = p_0 + u_1 \sin(U_1 + 1Z.x) + u_2 \sin(U_2 + 2Z.x) + u_3 \sin(U_3 + 3Z.x) + \dots$$

geben in welcher, sobald man n Werthe von y hat,

$$Z = \frac{360}{n}$$

zu setzen ist und die Constanten auf folgende Weise bestimmt werden können.

Man berechne die Hilfsgrößen p_0; p_1, q_1; p_2, q_2 .... nach den Gleichungen

$$p_0 = \frac{1}{n}\{y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots\dots + y_{n-2} + y_{n-1}\}$$

$$p_1 = \frac{2}{n}\{y_0 + y_1 \cos Z + y_2 \cos 2Z + y_3 \cos 3Z + \dots\dots + y_{n-1}\cos(n-1)Z\}$$

$$q_1 = \frac{2}{n}\{y_1 \sin Z + y_2 \sin 2Z + y_3 \sin 3Z + \dots\dots + y_{n-1}\sin(n-1)Z\}$$

$$p_2 = \frac{2}{n}\{y_0 + y_1 \cos 2Z + y_2 \cos 4Z + \dots\dots + y_{n-1}\cos(n-1)2Z\}$$

$$q_2 = \frac{2}{n}\{y_1 \sin 2Z + y_2 \sin 4Z + \dots\dots + y_{n-1}\sin(n-1)2Z\}$$

$$p_3 = \frac{2}{n}\{y_0 + y_1 \cos 3Z + y_2 \cos 6Z + \dots\dots + y_{n-1}\cos(n-1)3Z\}$$

$$q_3 = \frac{2}{n}\{y_1 \sin 3Z + y_2 \sin 6Z + \dots\dots + y_{n-1}\sin(n-1)3Z\}$$

u. s. w.

dann hat man zur Berechnung von $u_1 u_2 u_3$ ... U_1, U_2, U_3, ... die Gleichungen

$$u_1 \sin U_1 = p_1$$
$$u_1 \cos U_1 = q_1$$
$$u_2 \sin U_2 = p_2$$
$$u_2 \cos U_2 = q_2$$
$$u_3 \sin U_3 = p_3$$
$$u_3 \cos U_3 = q_3$$

u. s. w.

Wie viele Glieder in der letzten Gleichung, und folglich wie viele Constanten man zu wählen habe hängt von der Bedingung ab, die Annahme der folgenden neuen Constanten dürfe man unterlassen, sobald die Summe Σ der Quadrate der übrig bleibenden Fehler so klein geworden ist, daß sie nur Beobachtungsfehlern oder sonstigen außerordentlichen Störungen im regelmäßigen Gang zugeschrieben werden kann. — Es ist aber

$$\Sigma = (y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2) - n p_0 - \frac{n}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \dots) - \frac{n}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \dots)$$

aus welcher Gleichung man ersieht, daß man die Summe der Quadrate der Fehler, die nach der Hinzufügung jedes neuen Glieds, noch übrig bleibt, ohne umständliche Rechnung augenblicklich finden kann, und daß man folglich die Rechnung selbst nicht weiter fortzusetzen braucht als bis man zu derjenigen Verkleinerung dieser Summe Σ gelangt ist, bei welcher man sich ohne Bedenken begnügen kann. Uebrigens ist das Gewicht von p_0 durch die Größe n, das von $p_1, p_2 \dots q_1, q_2 \dots$ durch die Größe $\frac{1}{2}n$ gegeben. —

Die oben gegebenen Hilfsgrößen $p_1 q_1 \dots$ z. B. für $n = 12$ und also $z = 30$ sind folgende:

$$p_1 = \tfrac{1}{6}\{(y_0 - y_6) + (y_1 - y_5 - y_7 + y_{11})\cos 30^\circ + (y_2 - y_4 - y_8 + y_{10})\cos 60^\circ\}$$

$$q_1 = \tfrac{1}{6}\{(y_3 - y_9) + (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11})\sin 30 + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10})\sin 60^\circ\}$$

$$p_2 = \tfrac{1}{6}\{(y_0 - y_3 + y_6 - y_9) + (y_1 - y_2 - y_4 + y_5 + y_7 - y_8 - y_{10} + y_{11})\cos 60^\circ$$

$$q_2 = \tfrac{1}{6}\{(y_1 + y_2 - y_4 - y_5 + y_7 + y_8 - y_{10} - y_{11})\sin 60^\circ\}$$

und die Gleichung zur Bestimmung von y_x

$$y_x = p_0 + u_1 \sin(U_1 + 30^\circ . x) + u_2 \sin(U_2 + 60^\circ . x).$$

Dla znalezienia średniej temperatury miejsca z szerokości geograficznej i wyniesienia nad powierzchnią morza podaje Dr. H. J. Klein następujące wzory

dla średniej roczny … $45^\circ \cos \varphi - (18^\circ 1 + 0^\circ 0085 h)$

dla zimy (grud. styc. luty) … $38 \cos \varphi - (22^\circ 4 + 0^\circ 0077 h)$

dla lata (czerw. lip. sierp.) … $58^\circ \cos \varphi - (17^\circ 6 + 0^\circ 0082 h)$

w których temperatura jest w stopniach stułkowego termom. a h wyniesienie nad morze w metrach wyrażone oraz φ oznacza szerokość geogr. miejsca.

Otrzymane temperatury z 1) wzoru może być błędną $\pm 0^\circ 4$ zaś z 2) i 3), $\pm 0^\circ 7$

Um die mittlere Richtung des Windes, aus den Beob-
achteten Richtungen in einer gewissen Zeit zu be-
zeichnen, haben wir die Gleichung

$$\tang \varphi = \frac{A}{B}$$

in welcher φ ist der Winkel den die mittlere Richtung
mit dem Meridian macht und von Norden durch
Osten bis 360° gerechnet.

$$A = O - W + (NO + SO - SW - NW) \sin 45°$$

$$B = N - S + (NO + NW - SO - SW) \cos 45°$$

Die Buchstaben N, O, S, W, NO, NW etc. be-
zeichnen wie oft der Wind von diesen Gegenden
geweht hat.

Die Stärke der Resultirenden Kraft des Win-
des ist $= \sqrt{A^2 + B^2}$

Um die Thermometrische Windrose zu finden
haben wir den Ausdruck

$$T_n = t + u' \sin(n.45° + U_1) + u'' \sin(n.90° + U_2)$$

wo T_n den dem n^{ten} Winde (: in der Richtung N, O ...)
zugehörigen Thermometerstand bezeichnet, und
~~die Größen~~ u', u'', U_1, U_2 sind die aus den Beob-
achtungen zu bestimmende Größen.

Für die barometrische Windrose haben wir

$$B_n = b + u' \sin(n.45° + U_1) + u'' \sin(n.90° + U_2)$$

Cosmos 26 kwietnia z. r. 1863

Angielski dziennik „Illustrated London News" podaje następującą statystykę kuli ziemskiej:

Liczba mieszkańców na kuli ziemskiej jest 1288 milijonów. Z tych 369 mil. rasy kaukazkiej 552 mil. rasy mongolskiej 190 mil. murzyńskiej, 1 mil. indo amerykańskiej a 176 mil rasy malajskiej.

Wszystkie te rasy mówią 3642 językami a wyznają 1000 różnych wiar.

Corocznie umiera 33333333 ludzi, t. j. 91554 codzień czyli 3730 co godzina albo 60 co minuta, a zatém co sekundę umiera jeden człowiek. Każde przeto uderzenie jednej z tętnic jest zarazem znakiem zgonu człowieka. Ten atoli ubytek wynagradza się proporcyjonalną liczbą urodzin.

Średnie życie człowieka w ogólności na całej ziemi 33 lat. $\frac{1}{4}$ ludności umiera przed dojściem lat siedmiu życia, a $\frac{1}{2}$ ludności przed dojściem lat 17stu.

Jeden tylko człowiek na 10000 dochodzi lat 100; jeden także tylko na 500 dochodzi lat 90 życia i jeden na 100, przychodzi do lat 60.

Dzieci urodzone na wiosnę, są w ogólności mocniejsze niż urodzone w innej porze roku.

Najwięcej rodzi się i umiera ludzi w nocy.

$\frac{1}{8}$ część ludności zdolną jest do wojska.

Sposób zatrudnienia ma wielki wpływ na długość życia. I tak: z 1000 osób dosięgają 60 lat życia, 42 księży, 40 rolników kupców i rzemieślników — 33 żołnierzy, 32 urzędników, 32 inżenijerów, 29 adwokatów, 27 profesorów a lekarzy 24. A tak dziwnem zjawiskiem, ci którzy poświęcają swe życie na poszukiwanie sposobów przedłużenia innym życia, umierają najwcześniej. Jest to zaiste dość głupią rzeczą a może igraszką natury.

Na całej kuli ziemskiej jest 335 mil. chrześcian, 5 mil. izraelitów, 60 mil. wyznających jedną z licznych wiar azyjatyckich, 160 mil. machometanów a 200 mil. pogan. Z pomiędzy chrześcian jest 170 mil. katolików rzymskich, 76 mil. religii greckiej a 80 mil. protestantów.

Ludzie żonaci żyją w ogólności dłużej niż bezżenni, a ludzie dobrego wzrostu dłużej niż małego.

Na 1000 osób żeni się 65 i wesela najczęściej przypadają na miesiące czerwiec i grudzień i t. d.

Miary drożne

Kilometr albo mila (mille) = 1000 metr = 513 tois.
Myriametr — mila nowa = 10 Kilometr = 10 mille

Miary długości czyli liniowe

Decametr = Perche nouvelle = 10 metrów
Decimetr = Palme — — = $\frac{1}{10}$ metr
Centimetr = Doigt — — — = $\frac{1}{100}$ —
Millimetr = Trait — — — = $\frac{1}{1000}$

Miary do gruntów

Hectare = Arpent = 100 Ares
Are — — = Perche carrée = 100 metr carrés
Centiare = Metre carré = Metr carré
Metre carré — — — — = 100 decim. ou palmes carr.
Decimetre carré = Palme carrée = 100 centim. ou doigts carrés

Miary objętości dla płynów

Decalitre = Velte — — — = 10 Litres
Litre = Pinte — — = 1 decim. cube
Decilitre = Verre — — = $\frac{1}{10}$ Litre

Dla rzeczy sypkich

Kilolitre = Muid = 10 Hectolitres
Hectolitre = Setier = 10 Decalitres
Decalitre = Boisseau = 10 Litres ou litrons
Litre — — = Litron

50 Kilogram. = 89'28375 funt. wieden.
100 stop. kwadrat. wieden. = 9'9925 metrów kwadrat.
10 Kilogram. = 17'8567510 funt. wieden.

1000700 platów takich jak Francyja pokryje całą ziemię

Wody jest 3832000 Kilometrów kwadrat
Lądu — 12660000

Reduction der allgemeinen Längenmaße mittelst Logarithmen.

Zu dem Logarithmus der	addire	um zu erhalten den Logarithmus der
Baierischen Klafter	0.2433247	
" Fuß	0.4651734 − 1	
" Zoll	0.3859922 − 2	
" Linien	0.3068110 − 3	
Dänischen Klafter	0.2748765	
" Fuß	0.4967252 − 1	
" Zoll	0.4175440 − 2	
" Linien	0.3383628 − 3	
Englischen Yard	0.9611284	
" Fuß	0.4840071 − 1	
" Zoll	0.4048259 − 2	
" Linien	0.3256447 − 3	
Französischen Toisen	0.2898200	Meter
" Fuß	0.5116687 − 1	
" Zoll	0.4324875 − 2	
" Linien	0.3533063 − 3	
Niederländischen Palm	0.0000000 − 1	
Oesterreichischen Klafter	0.2779790	
" Fuß	0.4998277 − 1	
" Zoll	0.4206465 − 2	
" Linien	0.3414653 − 3	
Preusischen Klafter	0.2748783	
" Fuß	0.4967270 − 1	
" Zoll	0.4175458 − 2	
" Linien	0.3383646 − 3	
um zu erhalten den Logarithmus der	subtrahire	von dem Logarithmus der

Zu dem Logarithmus der		addire	um zu erhalten den Logarithmus der
Russischen	Faden	0.3292890—1	Meter
Sächsischen	Klafter	0.2294086	Meter
"	Fuss	0.4512573—1	Meter
"	Zoll	0.3720761—2	Meter
"	Linien	0.2929949—3	Meter
Schwedischen	Klafter	0.2506702	Meter
"	Fuss	0.4725189—1	Meter
"	Zoll	0.3933377—2	Meter
"	Linien	0.3141565—3	Meter
Polnischen	Klafter	0.2387485	Meter
	Fuss	0.4665972—1	Meter
	Zoll	0.3814160—2	Meter
	Linien	0.3022348—3	Meter
Polnischen	Fuss	0.8489725—1	Französischen Fuss
"	"	0.9607699—1	Wiener Fuss
"	"	0.9765908—1	Englischen Fuss
"	"	0.9638709—1	Preussisch oder rheinl. Fuss
"	Klafter	0.9094593—1	Petersburg Klafter
Um zu erhalten den Logarithmus der		subtrahire	von dem Logarithmus der

Aus dem Baumgartner Naturlehre

Supplementband

Ein Paris. Fuss = 144.00 Paris. Linien
Wiener Fuss = 140.13 ——
Rheinländ. Fuss = 135.10 ——
Bairischer Fuss = 129.38 ——
Englischer Fuss = 135.07 ——
Meter — — = 443.296 ——

Der provisorische Meter hatte 3.079458 Par. Fuss
es ist aber schon ausser Gebrauch

1 Meter = Par. Toisen 0.513074 = Par. Zolle 36.94133 = Par. Linien 443.2959 (a)

1 Toise = 1.949037 Meter
1 Par. Fuss = 0.3248394 Meter

Myriameter = 10,000 Meter
Kilometer = 1,000 ——
Hectometer = 100 ——
Decameter — — 10 ——
Decimeter — — — — $\frac{1}{10}$ ——
Centimeter — — — $\frac{1}{100}$ ——
Millimeter — — — $\frac{1}{1000}$ ——

1 Kilom. = 0.13477 mile geograf.
1 mile angl. = 0.21688 mile geograf.

NB Nach dem Paucker (: m. s. Schumachers Jahrbuch
(a) für 1836:) ist das Original-Meter des Längen-bureau = 0.513060 Paris. Toisen = 39.3705 Englisch Zolle
1 Paris. Fuss = 12.78183 Englische Zoll

Dove, Maass und Messen p. 39

443'296 paris. Linien = 39'37062 englische Zoll
daher
1 Toise = 6'39456 3993 englische Fuss
oder 1 Toise = 6'394564 ~~[illegible]~~ englische Fuss
Rozumie się tu Toise de Perou
Airy. Determination of the longitude of Valentia
p. 228. in Folge seiner Untersuchung in dem Artikel „Figure of the earth" in der Encyklopädia Metropolitana, hat angenommen

Halbe grosse Axe a = 20923713 engl. Fuss
— kleine — b = 20853810 —

Abplattung $= \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298'325}$

Parallaxa Słońca według Littrowa z Mansspraw. Enckego wypada = 8''57116 więc
średnia odległość słońca od ziemi = A Sin 8''57116
jeżeli A oznacza połowę osi wielkiej ziemi
czyli = 3272077'14 Toisów
t. j. odległość średnia słońca od ziemi = 20682324 m. g.
rachując 15 na 1° równika

Mila geograficzna = 3807'23463 Toise
= 1970'25008 preuss. Ruthen

Powierzchnia ziemi = 9261238'314 □ m. g.
Objętość — = 2650184445'7 s. m. g.
$\frac{1}{4}$ ziemskiego południka = 10000855'76 Metrów
więc $\frac{1}{10 \text{ milionowa}}$ część = Metrowi = 443'33394 linij
t. j. o 0'03794 par. linij dłuższy niż prawnie postanowiony

Pariser Fuss

Fuss	Toisen	Meter	Englischer Fuss und Zolle	
1000	166.66667	324.83938	1065	9.1832
2000	333.33333	649.67877	2131	6.3664
3000	500.00000	974.51815	3197	3.5496
4000	666.66667	1299.35754	4263	0.7328
5000	833.33333	1624.19692	5328	9.9160
6000	1000.00000	1949.03631	6394	7.0993
7000	1166.66667	2273.87569	7460	4.2825
8000	1333.33333	2598.71508	8526	1.4657
9000	1500.00000	2923.55446	9591	10.6489

Millim.	Pariser Linien	Englische Zolle
100	44.330	3.9371
200	88.659	7.8742
300	132.989	11.8112
400	177.318	15.7483
500	221.648	19.6854
600	265.978	23.6225
700	310.307	27.5596
800	354.637	31.4966
900	398.966	35.4337

Paris. Zolle	Millimeter	Englische Zolle
1	27.070	1.0658
2	54.140	2.1315
3	81.210	3.1973
4	108.280	4.2631
5	135.350	5.3288
6	162.420	6.3946
7	189.490	7.4604
8	216.560	8.5261
9	243.630	9.5919
10	270.699	10.6577
11	297.769	11.7234

Toisen und Meter

Toisen	Meter
1000	1949.03631
2000	3898.07262
3000	5847.10893
4000	7796.14524
5000	9745.18155
6000	11694.21786
7000	13643.25417
8000	15592.29048
9000	17541.32679

Meter	Toisen	Englische Fuss und Zolle	
1000	513.07407	3280	10.7900
2000	1026.14815	6561	9.5800
3000	1539.22222	9842	8.3700
4000	2052.29630	13123	7.1600
5000	2565.37037	16404	5.9500
6000	3078.44444	19685	4.7400
7000	3591.51852	22966	3.5300
8000	4104.59259	26247	2.3200
9000	4617.66667	29528	1.1100

Francuzka mila jakich idzie 15 na 1° równika = 7408 metrów

Mila nazwana Lieue jakich 25 na 1° równika = 4445

Aby więc zamienić francuzkie Lieues których często używają w dziełach astronomicznych na mile geograficzne t.j. takie jakich 15 idzie na 1° równika potrzeba pierwsze rozmnożyć przez

$\frac{4445}{7408} = 0'600027$

Mila francuzka krajowa = 5 kil.m. = 5000 metr. = 2280'3289

W dziele Francoeur Uranographie, używane (i dawniej mile francuzkie) są Lieues których długość jest 2280 Toise

Aby więc te mile zamienić na geograficzne potrzeba je rozmnożyć przez 0'59938518

bo według przepisów Enckego

mila geograficzna = 3807'23463 Toise

W dziele Arago ~~populaire~~ Astronomie populaire rachowane są wielkości i odległości na mile czterokilometrowe ~~francuzkie~~ czyli po 4000 metrów

Aby takie mile obrócić na geograficzne potrzeba je rozmnożyć przez ~~[illegible]~~ 0'53905

1 Mila geogr. = 3912'467 sążni = 23474'8 stop wiedeń.

1 Mila niemiecka = 1'0223726 mil geogr.

1 Mila niemiecka □ (: 10000 morgów (wied.) :) = 1'04524577 mil geogr. □

1 Mila angielska = 1'60931 Kilometrów

" geogr. czyli morska = 1'85185 Kilom.

M. austryacka = 4000 toise = 24000 stop = 7'5864 Kilom.

M. czeska = 22017 stop reńskich = 6'91012 Kilom.

M. włoska = 1'85644 Kilom.

M. węgierska = 8'35636 Kilom.

M. badeńska = 8'88888 Kilom.

M. franc. morska = 2850'4111... toise = 5556 m. – 20 na 1° [illegible]

M. franc. pocztowa = 2000 toise = 2 milles

Tablica wartości ilości należących do koła częstego użycia

π = 3·14159 26535 89793 … log π = 0·49714 98726 9413

¼π = 0·785$\overset{3}{8}$9 86633 97448 – log ¼π = 9·89508 98813 6617

⅙π = 0·52359 87755 98299 … log ⅙π = 9·71899 86223 1049

$\frac{4}{3}$π = 4·18879 02047 86391 log $\frac{4}{3}$π = 0·37791 13906 9757

$\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ = 1·24070 09817 99700, log $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ = 0·09366 71258 9650

$\sqrt[3]{\pi}$ = 1·46459 18881 91298, log $\sqrt[3]{\pi}$ = 0·16571 66242 3138

$\sqrt{\pi}$ = 1·77245 38509 05516, log $\sqrt{\pi}$ = 0·24857 49363 4707

π² = 9·86960 44010 89359, log. π² = 0·99429 97453 8827

π³ = 31·00627 66802 93493 log π³ = 1·49144 96180 8240

log. nep. π = 1·14472 98858 494 … 0·05870 30212 3982

1° = 0·01745 32925 19943 29577 R° = 57°·29577

1' = 0·00029 08882 08665 72166 R' = 3437'·74677

1" = 0·00000 48481 36881 09536 R" = 206264"·80624

log R° = 1·75812 26324 0917

log R' = 3·53627 38827 9282 360° = 1296000"

log R" = 5·31442 51331 7646

sin 1° = 0·01745 24064 17275 54, log sin 1° = 8·24185 53184 1831

sin 1' = 0·00029 08882 04563 4246, log sin 1' = 6·46372 61110 8248

sin 1" = 0·00000 48481 36811 07636 68 … 4·68557 48668 2184

tg 1" = 0·00000 48481 36811 15~~2~~7363 … 4·68557 48668 2694

Według nowego podziału okręgu koła

sin 1^g = 0·01570 73173 11820 67675 4

sin 1' = 0·00015 70732 ~~17311 82067 6754~~
03352 565215

sin 1" = 0·00000 15707 96326 79421 507

log sin 1^g = 8·19610 20172 3855

log sin 1' = 6·19611 98752 4419

log sin 1" = 4·19611 98770 2997

W praktycznej Geometryi jest zadanie często użyte „wymierzyć długość zupełnie niedostępnej linii."

Mascheroni w swém dziele „Problemi per gli Agrimensori con varie soluzioni. Pavia 1793" podał 20 sposobów rozwiązania tego zadania. Sposób 12sty zależy na tém co następuje:

XZ długość do zmierzenia

Za pomocą mierniczej węgielnicy wynajduje się trzy punkta A, B, C, takie, aby każdy z kątów XAZ, XBZ, XCZ był kątem prostym, przez co otrzyma się trójkąt ABC. Za pomocą węgielnicy spuszcza się z wierzchołka B prostopadłą BD do AC, wymierza linije AB, BC i BD i otrzyma się $XZ = \frac{AB.BC}{BD}$.

Dowód zostawił autor czytelnikowi.

Servois poczytuje to rozwiązanie zadania za bardzo udatne, uczynił uwagę, że kąty XAZ, XBZ, XCZ i BDC nie mają być koniecznie prostemi, ale tylko wszystkie między sobą równemi. Według tej uwagi, można szukać punktów A, B, C, D za pomocą nawet niedokładnej czyli niezregulowanej węgielnicy, t.j. któréjby linije celowe nie były ściśle do siebie prostopadłemi, lub nawet za pomocą tak zwanej niby węgielnicy (fausse equerre) t.j. jakiegokolwiek kąta, a tę ostatnią węgielnicę można sobie takowo samemu przysposobić. Tak uogólnione przez siebie rozwiązanie, dowiódł Servois trygonometrycznie, które zamieścił do swej Geodezyi 1842 w Lipsku wydanej przyjął. Ten dowód jest następujący:

Z trójkątów CXZ i ACZ mamy $XZ : CZ = Sin\, XCZ : Sin\, CXZ$
i $CZ : AC = Sin\, CAZ : Sin\, AZC$

Że wszystkie 5 punktów X, A, B, C, Z znajdują się według wzmianki, [jednymże] na obwodzie tegoż koła, przeto kąty CXZ i CAZ są równe, a tém samem ze stosunków powyższych proporcyj wypada $XZ : AC = Sin\, XCZ : Sin\, AZC$

Lecz $AZC + ABC = 180$ jako w antiparallelogramie ABCZ, więc $Sin\, AZC = Sin\, ABC$

a następnie $XZ = \frac{AC \sin XCZ}{\sin ABC}$. Że w trójkątach ABC i BCD jest $AC : AB = \sin ABC : \sin ACB$

i $BD : BC = \sin ACB : \sin BDC$

przeto $AC . BD : AB . BC = \sin ABC : \sin XCZ$ bo kąt XCZ z wystawienia jest $= BDC$. Z tej proporcyi wypada

$AC . BD . \sin XCZ = AB . BC . \sin ABC$ czyli

$\frac{AC \sin XCZ}{\sin ABC} = \frac{AB . BC}{BD} = XZ$ na mocy powyższego wyrażenie.

Augustyn Frzerkiewicz: (przy wykładzie w r. 1845. A. F.) w Warszawie powiedział swoim uczniom miernictwa w Warszawie, że w przypadku gdy punkta A, B, C tak będą obrane iże przy nieznane kąty były między sobą równe a dalej na linii AO punkt B tak będzie obrany żeby kąt BDC każdemu z trzech poprzednich był równy, możnaby potrzebę dowodu następującym: Ponieważ pięć punktów X, A, B, C, Z ~~[illegible]~~ znajdują się na jednymże obwodzie koła, z powodu że kąty XAZ, XBZ i XCZ są sobie równe, oznaczywszy przeto promień tego koła przez R, oraz wyobraziwszy sobie przez punkta B, C, D inny obwód koła którego promień oznaczmy przez R′, dla równości kątów BCD i BCA, BD i AB są cięciwami, ~~[illegible]~~ tamże pierwsza w kole z promienia R′ a druga w kole z promienia R. Że takie cięciwy są proporcyjonalne promieniom, zatem

$BD : AB = R' : R$. — Podobnie dla równości kątów BDC i XAZ jest $BC : XZ = R' : R$. Z tych dwóch proporcyj wypada, $XZ = \frac{AB . BC}{BD}$. ——

Mascheroni w 19 rozwiązaniu przymierzenia tejże samej długości XZ mówi że znalazłszy taki punkt C, iżby kąt XCZ był prosty, a potem przedłużywszy XC do B i ZC do A tak żeby kąty CAX i CBZ były połowami prostego będzie XZ = AB. — Frzerkiewicz na mocy powyższego rozwiązania pokazuje że nie jest koniecznym aby kąt XCZ był prosty byle tylko kąty CAX i CBZ były jego połowami; bo i w tym przypadku kąty CAX i CXA, CBZ i CZB będą równe a stąd trójkąty CXZ i CAB przystają do siebie i t. d. To moje rozwiązanie możnaby także wykonać za pomocą nierównych ~~[illegible]~~ podwójnego do wyższego znalezienia punktu C.

/: Zobacz Biblijoteka warszawska zeszyt Majowy r. 1859. stron. 515. :/

Jeżeli φ wyraża szerokość geograficzną, l długość pendulu sekundowego, tedy wyrażenia przyjmuję

od $\varphi = 0°$ do $\varphi = 45°$ ... $l = 39{\cdot}016734 + 0{\cdot}196326 \sin \varphi^2$

$45°$ — $90°$ ... $l = 39{\cdot}016734 + 0{\cdot}210126 \sin \varphi^2$

skąd l otrzyma się w calach angielskich [struck] przyjmując z Besselem 1 metr = 39·37 cali angielsk. Według Biota długość pendulu sekundowego pod szerokością geograf. 45° jest = 993·534239 millim. = 39·12 cali angiel.

Znając l można znaleźć przestrzeń g jaką ciało przebywa w pierwszej sekundzie spadając wolno, gdyż jest $g = \frac{1}{2} l \pi^2$ gdzie znaczenie π znane

---

Średni promień ziemi odpowiadający szerokości geogr. który wstawia $= \frac{1}{3}\sqrt{3}$ t.j. szerokości $35° 15' 52''$ prawie i który promień $= a - \frac{1}{3}(a-b)$ jest $= 3268766$. Ten średni promień oznaczywszy przez r a szerokość geograficzną przez φ, wyrażenie promienia ziemi dla tejże szerokości φ będzie $r(1 - \varepsilon \cos \varphi^2)$ gdzie $\varepsilon = \frac{1}{294{\cdot}36}$ t.j. spłaszczenie ziemi.

W proporcyi $x : y : z$

jest $$\frac{(x-y)(y-z)}{(x-y)-(y-z)} = y$$

bo $\frac{x-y}{y-z} = \frac{y}{z}$ skąd $x - y = \frac{y(y-z)}{z}$ zatem

$$(x-y)(y-z) = \frac{y(y-z)^2}{z} = \frac{y(y^2 - 2yz + z^2)}{z}$$

lecz $y^2 = xz$, zatem $\frac{y^2 - 2yz + z^2}{z} = x - 2y + z = (x-y) - (y-z)$

a nareszcie $$y = \frac{(x-y)(y-z)}{(x-y)-(y-z)}$$

(Z dwóch przejść Wenus przez tarczę słoneczną t. j. w r. 1761 i 1769, znalazł Encke Paralaxę poziomą na równiku (: Aequatoreal-Horizontalparallaxe :) Słońca = 8".5776 z prawdopodobnym błędem ± 0".0370 co znaczy że taż Paralaxa nie jest mniejsza od 8".5406
ani większa od 8".6146
co następnie że średnia odległość Słońca od ziemi
nie jest mniejsza od 2057764 (49) mil geogr.
ani większa od 20755943 ———

log. 2 = 0.30102999566398119521373889472
według wzoru
$$\log(a+x) = \log a + 2M\left\{\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2a+x}\right)^3 + \dots\right\}$$
kładzie $a = 1000$ a $x = 24$, gdyż $2^{10} = 1024$ stąd $\log 2 = \frac{\log 1024}{10}$

log. 3. = 0.47712 12547 19662 43729 50279 0325
log. 7 = 0.84509 80400 14256 83071 22162 5859
log. 11. = 1.04139 26851 58225 04075 0199971
log. 13 = 1.11394 33523 0683676920 6505158
Modulus = 0.43429448190325182765112891891 66
log. nat. 2 = 0.69314 71805 59945 30941 72321 214 58 2
log. nat. 5 = 1.609437912434100 37460 07593 33226 2

Powyższy wzór otrzymuje się ze znanych
$$\log(1+z) = M\left(z - \frac{z^2}{2} + \dots\right)$$
$$\log(1-z) = M\left(-z - \frac{z^2}{2} - \dots\right)$$
$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \dots$$
kładzie $\frac{1+z}{1-z} = 1+x$ a potem kładzie $\frac{x}{a}$ za x

Archimedes 287–212 przed Chr. zbadawszy własności Drążka, rzekł do Króla Hierona „da mihi punctum ubi consistam et terram movebo„

Objętość ziemi = 1079235800 myriamet. sześciennych

1 Myriametr sześć. = 1000000000000 metrów sześciennych

Metr sześcienny wody, waży 1000 Kilogramów

Ciężkość gatunkowa ziemi jest 5 razy większa niż wody, a zatem Metr sześcienny ziemi waży 5000 Kilogr.

1 Myriametr materyi z której się ziemia składa waży zatem

5000000000000000 Kilogr.

a następnie cała kula ziemska waży

$5396179 00 \times 10^{16}$ Kilogr.

Siła zwyczajnego człowieka ciągnącego wóz lub statek rachuje się około 15 Kilogr. wypadnie więc liczba podzielona przez 15 jest

359745266666666666666666 Kilogr.

Przypuściwszy że krótsze ramię drążka Archimedesowego miałoby 1 metr długości, przypuściwszy powtóre że był ten drążek bez ciężaru i niegiętki t. j. matematyczny, w takim razie dłuższe jego ramię mieć by musiało

359745266666666666666666 metrów

wiadomo, że długości tak dwu przeciwległych przez końce drążka mają się w stosunku przeciwnym ich długości, przeto aby podnieść ziemię na 1 decimetr, musiałby Archimedes przebieżć drogę

35974526666666666666 myriametrów

Przypuściwszy iż przebywa na 1 rok 2000 myriametrów albo 200000 myriametrów na wiek, tedy dla ruszenia ziemi z jej posady na 1 decimetr, potrzebowałby czasu

1798726333333333 wieków!

Friedrich Wilhelm Bessel urodził się 22. Lipca 1784 w Preussisch-Minden. – W r. 1810 powołany do Krolewca jako Astronom gdzie też d. 17. Marca 1846 umarł.

Arago umarł d. 2 Paźdz. 1853.

Alexander Humboldt urodził się d. 14. Wrześ. 1769 umarł d. 6. Maja 1859 o godz. 2½ popołud.

Ludność całej ziemi podał Balbi w r. 1826, na 740 milijonów dusz, Hoffmann w r. 1840 na 997 milion. Cannabich w r. 1847, na 1065 milijonów
Berghaus w r. 1843 – – 1272 ——
Klöden w r. 185.. "Handbuch der Erdkunde" podaje ludność ziemi na 1360 milijonów dusz z tych schodzie

na Australiję	4 milijony	t. j. 1/340	całej ludności
Afrykę	250 ——	2/11	——
Azyję	777 — — —	4/7	——
Amerykę	56 — — —	1/24	——
Europę	273 — — —	1/5	——

Liczba drukowanych dzieł w znakomitszych bibliot., tokach europejskich

w Paryżu bibliyoteka cesarska	800000
Londynie Muzeum brytańskie	560000
Petersburgu bibl. cesar. — — —	520000
Berlinie — — — —	520000
Monachium — — — —	480000
Kopenhaga — — — —	470000
Wiedeń — — — —	365000
Getyngą — — — —	360000
Wrocław — — — —	350000
Drezno — — — —	305000

Londyn w r. 1801 zajmował 3 razy mniejszą powierzchnię niż w r. 1858 i miał mieszkańców zaledwo 958863 dusz w tym zaś ostatnim roku zajmował powierzchni 5¾ geogr. mil □ i miał mieszkańców przeszło 2800000.

Um eine Billion zu zählen, vorausgesetzt daß man in einer Minute 60 zählt, und Tag und Nacht fortzählt, brauchte ein einzelner Mensch 31709 Jahre 289 Tage, 1 Stunde, 46 Minuten und 40 Secunden. Oder wenn z. B. eine Billion Thaler in einem Jahre gezählt werden soll, brauchte man dazu 31709 Menschen, die ohne Unterbrechung 60 in einer Minute zählen müßen. Denkt man sich die Billion in Silber, den Thaler zu 1 Loth Gewicht, so müßen dazu ausgeprägt seyn 312 Millionen und 500000 Zentner Silber. Diesen Last fortzuführen wären nöthig 31 Millionen und 250.000 Pferde, wenn jedes zu 10 Zentner zu ziehen hätte.

Rechen-Maschinen

Leibnitz soll mit einem Aufwande von mehr als 24000 Thl. viele seiner Nebenstunden mehren Jahre lang dem Nachsinnen über die Erfindung einer Rechenmaschine aufgeopfert haben.

Der Pfarrer Hahn hat über seine Maschine 7 Jahre gearbeitet.

Stern in Warschau 8 Jahre mit einem Aufwand von mehr als 10000 Thl.

Das Riesenwerk von Babbage in England, hat 6 Jahre Zeit und einen Kosten-Aufwand von 17000 Pfd Sterling erfordert.

Slonimsky in Bialystok hat im Jahre 1844 eine sehr einfache Rechenmaschine erfunden. Diese besteht nur aus einem hölzernen Kästchen 14 Zoll lang 10 Zoll breit und $2\frac{1}{4}$ Zoll hoch welches von jeder bis auf 7 Stellen beliebigen Zahl alle 8 einfachen Producte d.h. das 2.3...9fache gibt und nur 6 bis 7 Thlr. kostet.

Ludność kuli ziemskiej według „Geographisches Jahrbuch von Behm 1ter Band" z r. 1866

Europa ma 285 } milijonów mieszkańców
Azyja 798 }
Australyja i Pol. ~~2~~3850000
Afryka 188 } milijony
Ameryka 74 }

Magiczne Kwadraty.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23

